

# Série Tecnologia Mineral

## Simulação de Plantas de Processamento Mineral: Princípios Básicos

R. Peter King

Claudio Luiz Schneider

# **SÉRIE TECNOLOGIA MINERAL**

## **Simulação de Plantas de Processamento Mineral: Princípios Básicos**

## **PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA**

**Michel Miguel Elias Temer Lulia**

Presidente

## **MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES**

**Gilberto Kassab**

Ministro de Estado da Ciência, Tecnologia, Inovações e  
Comunicações

**Elton Santa Fé Zacarias**

Secretário-Executivo

**Paulo Roberto Pertusi**

Diretor de Gestão das Unidades de Pesquisa e Organizações Sociais  
da Secretaria Executiva

**Luiz Henrique da Silva Borda**

Coordenador-Geral das Unidades de Pesquisa e Organizações  
Sociais

## **CETEM – CENTRO DE TECNOLOGIA MINERAL**

**Fernando Antonio Freitas Lins**

Diretor

**Arnaldo Alcover Neto**

Coordenador de Análises Minerais

**Claudio Luiz Schneider**

Coordenador de Processos Minerais

**Durval Costa Reis**

Coordenador de Administração

**Robson de Araújo D'Ávila**

Coordenador de Planejamento, Gestão e Inovação

**Francisco Wilson Hollanda Vidal**

Coordenador de Apoio Tecnológico às Micro e Pequenas Empresas

**Andréa Camardella de Lima Rizzo**

Coordenadora de Processos Metalúrgicos e Ambientais

# **SÉRIE TECNOLOGIA MINERAL**

ISSN 0103-7382

ISBN – 978-85-8261-064-0

**STM - 96**

## **Simulação de Plantas de Processamento Mineral: Princípios Básicos**

**R. Peter King**

Ph.D. em Engenharia Química.

**Claudio L. Schneider**

Ph.D. em Metalurgia Extrativa pela Universidade de Utah.  
Tecnologista Sênior do CETEM/MCTIC.

**CETEM/MCTIC**

2016

## **SÉRIE TECNOLOGIA MINERAL**

**Marisa Bezerra de Mello Monte**

Editora

**Claudio Luiz Schneider**

Subeditor

### **CONSELHO EDITORIAL**

Arnaldo Alcover Neto (CETEM), Fernando A. Freitas Lins (CETEM), Regina Coeli C. Carrisso, (CETEM), Reiner Neumann (CETEM), Ronaldo Luiz C. dos Santos (CETEM), Achilles Junqueira B. Dutra (UFRJ), Antonio E. Clark Peres (UFMG), José Aury de Aquino (CDTN), José Farias de Oliveira (UFRJ), Lino R. de Freitas (CVRD), Luciano Tadeu da S. Ramos (CVRD), Mário Rui M. Leite (IGM-PORTUGAL) e Maurício L. Torem (PUC-RIO).

A Série Tecnologia Mineral publica trabalhos na área minerometalúrgica. Tem como objetivo principal difundir os resultados das investigações técnico-científicas decorrentes dos projetos desenvolvidos no CETEM.

O conteúdo desse trabalho é de responsabilidade exclusiva do(s) autor(es).

**Valéria Cristina de Souza**

Coordenação Editorial

Editoração Eletrônica

**Claudio Luiz Schneider**

Revisão

---

King, Peter R.

Simulação de plantas de processamento mineral: princípios básicos / R. Peter King [et al.]. — Rio de Janeiro: CETEM/MCTIC, 2016.

102p. il. (Série Tecnologia Mineral, 96)

1. Simulação. 2. Sistemas particulados. 3. Balanço populacional. I. Centro de Tecnologia Mineral. II. R. Peter King. III. Claudio Luiz Schneider. IV. Título. V. Série.

CDD – 622.79

---

## SUMÁRIO

RESUMO _____	7
ABSTRACT _____	9
1   O QUE É SIMULAÇÃO? _____	11
2   O QUE É UM SIMULADOR DE PROCESSAMENTO MINERAL? _____	14
3   QUAL SIMULADOR PODE SER UTILIZADO? _____	17
4   O MODELO DO MINÉRIO _____	19
5   O ESTADO PARTICULADO _____	22
6   DISTRIBUIÇÃO DE TAMANHOS DE PARTÍCULAS ____	24
7   LIBERAÇÃO MINERAL E A DISTRIBUIÇÃO DE TEORES _____	28
8   PROPRIEDADES FÍSICAS DAS PARTÍCULAS _____	33
9   DISTRIBUIÇÃO DE CONSTANTES CINÉTICAS DE FLOTAÇÃO _____	35
10   ALIMENTAÇÃO NA PLANTA E ADIÇÃO DE ÁGUA __	37
11   MODELOS PARA OPERAÇÕES DE PLANTAS DE PROCESSAMENTO MINERAL _____	39
12   POPULAÇÕES DE PARTÍCULAS E FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO _____	41
13   MÉTODO DE MODELAGEM DE BALANÇO POPULACIONAL _____	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	98



## RESUMO

O texto contido nesta série foi escrito de forma didática e detalhada pelo Prof. King, um dos maiores, se não, o maior entusiasta do uso de modelos e simuladores de plantas de processamento mineral em toda a história moderna desta área de conhecimento. A tradução do texto para o Português deixa a desejar, uma vez que o Prof. King escrevia muito bem em Inglês.

O objetivo do texto é colocar de forma clara e didática as bases para o desenvolvimento de simuladores de plantas de processamento mineral. Aqui, são tratados todos os aspectos relevantes que dizem respeito aos sistemas particulados, ou seja as partículas de rochas ou minerais tem suas propriedades descritas em função dos processos.

Para que um processo ou até mesmo uma planta de processamento possa ser simulada é necessário desenvolver um modelo para o minério, onde os parâmetros deste modelo são necessariamente obtidos a partir da caracterização tecnológica e física das partículas que compõe o minério. Aqui são discutidas, em detalhe, as propriedades das distribuições que descrevem as populações de partículas, incluindo tamanho e composição e conseqüentemente densidade, liberação, etc.

Com as técnicas de modelamento dos minérios fundamentadas, o texto passa a descrever a técnica de modelamento de balanço populacional, que é bastante apropriada aos sistemas particulados e, em especial, aos processos de cominuição. Uma equação geral do modelo de balanço populacional é apresentada e em seguida a equação geral é modificada para processos de cominuição.



Ao longo do texto alguns exemplos são apresentados de forma bastante simplificada, para fins de ilustração. Um texto mais detalhado necessitaria de um simulador ou algum meio de possibilitar ao leitor colocar em prática os princípios apresentados. Infelizmente isto não é possível no momento.

**Palavras-chave**

Simulação; Sistemas Particulados; Balanço Populacional.

## ABSTRACT

The text contained in this series has been very well written by one of the most, if not the greatest enthusiasts of modelling and simulation in mineral processing. Prof. King always made every effort to be clear and as didactic as possible since he was a teacher before anything else, with a very significant and successful academic background. Unfortunately his quality and care in writing have been lost, to some extent, in the translation to Portuguese.

The objective of the text is to present in a clear fashion the basis for the development of mineral processing plant simulators. Every relevant aspect with respect to particulate systems is covered here. In other words, the particles of rocks and minerals have their properties described according to the processing environment to which they are submitted.

In order for a mineral processing unit operation, or even an entire mineral processing plant, to be simulated successfully it is necessary to develop an ore model, with parameters for the ore model determined in the laboratory using physical characterization methods as well as mineralogical characterization methods. The properties of the distributions that are characteristic of particle populations are described in detail, including size, composition, density, liberation, etc.

The fundamental distributions that comprehend the ore model pave the way for a description of the population balance modeling technique, which is appropriate to describe particulate systems, and is especially suitable to describe comminution processes. A general equation of population balance modelling is developed and presented and this general equation is then modified for comminution processes.

The text contains a few examples that are presented in a most simplified way for illustration purposes. More detailed examples would demand the availability of a simulator for a complete experience of the practical principles that are discussed.

Unfortunately this is not possible at this time. Therefore, this text is only meant to be used as a formal description of population balance modeling techniques.

**Keywords**

Simulation; Particulate Systems; Population Balance.

## 1 | O QUE É SIMULAÇÃO?

Nos últimos anos, têm surgido na literatura muitas referências sobre simulação, em computador, como uma técnica para projeto e análise de unidades industriais de processamento mineral. Isto vem se tornando um campo popular da pesquisa, com uma grande quantidade de bons trabalhos já desenvolvidos, tornando a simulação uma ferramenta viável e prática. Simulação é qualquer procedimento usado para modelar um processo, sem ter que pré operá-lo. Existem várias maneiras de chegar a uma simulação, no entanto a mais eficiente é através do computador digital. O computador digital é programado para imitar o comportamento de uma planta e pode prover uma descrição do que a mesma fará e como essa funcionará sob uma variedade de circunstâncias. Na prática esta estratégia é adotada porque o computador pode expor muitos aspectos do projeto de uma planta, sem o inconveniente de ter que operá-la sob condições experimentais variadas. É surpreendente como uma boa simulação em computador pode fornecer informações efetivas sobre comportamento e o desempenho de uma planta de processamento mineral.

A simulação de um sistema complexo de engenharia só é possível quando se tem a compreensão detalhada de cada componente e a simulação é, para o engenheiro, uma ferramenta de previsão do comportamento de sistemas mesmo que estes não existam na realidade. Entretanto, a previsão de um simulador só é boa na medida em que se tenha uma compreensão básica das partes componentes. O computador é um componente essencial da simulação, por duas razões:

- na maioria dos sistemas de interesse para o engenheiro de processamento mineral, as operações unitárias individuais são tão complexas que estas só podem ser convenientemente descritas em termos matemáticos. Em geral estes termos podem ser traduzidos para código de computador;
- os sistemas de interesse relevam interações e interconexões complexas entre as unidades individuais. Em muitos casos, essas interações complexas não podem ser descritas de forma adequada por métodos puramente matemáticos e a habilidade do computador para transferir informações de um programa de modelo para outro é explorada efetivamente para simular as transferências de material, informação ou energia de um sistema real.

Formulações puramente matemáticas de sistemas complexos só são realmente efetivas quando os sistemas são lineares no sentido matemático. Nestes casos, a álgebra linear e matricial pode ser utilizada para resolver o problema. Lamentavelmente, a maioria dos sistemas de interesse reais são fortemente não-lineares e são necessárias as capacidades heurísticas do computador para ocupar o espaço das descrições puramente matemáticas.

A relação entre o modelo e o sistema real de engenharia será enfatizada várias vezes no decorrer deste capítulo. Isto é vital e constitui-se no princípio fundamental envolvido. A simulação em computador é uma representação abstrata da realidade, construída em código de computador. Para ser útil, deve representar aspectos apropriados da situação real, de uma maneira tal que uma informação útil seja obtida. Modelos para operações unitárias são sintetizados a partir de modelos matemáticos das partes componentes. Isto será considerado, em detalhe, no decorrer do capítulo.

Técnicas de simulação foram desenvolvidas ao longo dos anos e agora é possível simular o desempenho de uma ampla variedade de sistemas de interesse da engenharia. Será dada ênfase especificamente para a simulação de plantas de beneficiamento de minérios. O simulador aqui utilizado foi desenvolvido para fornecer uma descrição realística da operação de qualquer planta de beneficiamento de minério, tendo como base as melhores técnicas de simulação atualmente disponíveis, e usos eficientes de procedimentos da análise numérica para garantir que os cálculos sejam feitos de forma precisa.

## 2 | O QUE É UM SIMULADOR DE PROCESSAMENTO MINERAL?

O simulador é um conjunto de programas de computador que fornecerá uma descrição numérica de uma planta de beneficiamento de minério. O simulador deve conter uma descrição acurada do:

- minério a ser processado;
- fluxograma que define o processo;
- funcionamento de cada operação unitária que faz parte do fluxograma.

O simulador usa essas informações para fornecer uma descrição da operação da planta. A descrição detalhada do minério incluirá informações sobre suas características físicas e mineralógicas. Uma metodologia para levantar essas informações será descrita posteriormente. O fluxograma é a representação gráfica do conjunto das operações unitárias na planta, mais a rede de tubulações e transportadores que conduzem material entre as unidades. A descrição do funcionamento das operações unitárias é conhecida como modelagem e é necessário modelar de forma precisa o comportamento de cada operação unitária da planta a ser simulada. Literalmente, o simulador reúne o comportamento modelado de cada operação unitária e sintetiza o desempenho global destas.

Quatro conceitos fundamentais enfatizam a construção de um simulador de uma planta de beneficiamento de minério:

- plantas de beneficiamento são grupos de operações unitárias conectadas pelas correntes de fluxo do processo que conduzem material de uma unidade para a próxima. O fluxo de materiais é dirigido pela estrutura do fluxograma;

- cada operação unitária processa sua própria alimentação de materiais e os separa ou transforma-os, de acordo com o objetivo específico da unidade;
- comportamento da planta, como um todo, depende das características de cada operação unitária, bem como da natureza do material que é processado na planta;
- simulador reduz as operações da planta, como definido pela estrutura do fluxograma e o comportamento das unidades, para uma sequência de funções matemáticas lógicas.

Cada conceito que leva à construção de simulador viável e confiável será examinado e discutido. Os conceitos básicos são independentes da natureza precisa de qualquer planta em particular. Esses conceitos levarão ao desenvolvimento de programas (*software*) de simulação que podem ser usados para todas as possíveis configurações de uma planta. A viabilidade de tal *software*, como objetivo geral, faz da simulação em computador uma ferramenta prática e útil no dia a dia da engenharia. Escrever o conjunto de funções requeridas pelo computador para simular uma unidade complexa de beneficiamento de minérios é uma tarefa difícil. A maioria dos engenheiros não têm tempo, inclinação, nem habilidade para tal e não seria custo-efetivo escrever as funções para cada aplicação. O custo em homem horas para gerar as funções, encontrar e remover as falhas num programa de computador, de forma que a máquina possa trabalhar confiavelmente, demandaria bastante tempo. A computação de quaisquer sistemas de engenharia é um negócio altamente especializado e isto é verdade também no processamento mineral e tais atividades devem ser feitas somente por especialistas. Vários simuladores para plantas de beneficiamento de minérios estão, no momento, disponíveis, e entre outros, o MODSIM oferece uma grande versatilidade para o usuário modificar e adaptar modelos de operações unitárias que são usados



pelo simulador. Os modelos padrão que são oferecidos neste pacote são baseados em conceitos recentes, a partir da literatura moderna de processamento mineral. Vários dos modelos que estão incorporados como padrão, foram desenvolvidos pelos autores e não estão disponíveis em alguns dos simuladores comerciais. MODSIM é particularmente robusto no modelamento do fenômeno de liberação mineral.

Um simulador que tenha por objetivo geral produzir informações úteis sobre o processo real a ser simulado, deve ter acesso a três classes importantes de informação. Em termos gerais, essas são definidas da seguinte forma:

- a estrutura do fluxograma – quais operações unitárias estão incluídas e como essas são conectadas;
- a natureza do material a ser processado – sua composição mineralógica e estrutura, a distribuição granulométrica e a quantidade que deve ser processada;
- as características de operação de cada unidade no fluxograma, o que requer a descrição completa das operações unitárias (os modelos) e uma especificação dos parâmetros que definem as características de operação das unidades individuais.

### 3 | QUAL SIMULADOR PODE SER UTILIZADO?

Um bom simulador é uma ferramenta útil para o engenheiro de processo da planta. Essencialmente, o simulador pode demonstrar o que a planta fará sob algumas condições operacionais particulares. Isto pode ser feito de uma maneira barata e sem risco real para o volume de produção ou pode ser feito anteriormente, na elaboração do projeto da planta.

#### **Estudos de Projeto**

No estágio de projeto, um bom simulador pode ser usado para:

- ajudar o engenheiro de projeto a definir o melhor fluxograma;
- assegurar que as especificações de projeto serão satisfeitas sob todas as condições operacionais requeridas;
- dimensionar as unidades corretamente e assim eliminar o desperdício de um projeto superdimensionado e evitar a catástrofe do subdimensionamento;
- otimizar a operação da planta, alcançando a melhor combinação econômica de teor e recuperação;
- identificar as dificuldades potenciais de produção;
- fornecer uma avaliação comparativa de equipamentos de fabricantes concorrentes;
- definir as garantias de desempenho que devem ser atingidas pelos fornecedores;
- descobrir o que acontecerá se as garantias de desempenho não forem atingidas.

## **Desempenho da Planta em Operação**

Um bom simulador pode ajudar o gerente da planta a:

- obter o desempenho ótimo a partir de sua planta;
- ajustar sua planta para adaptar-se às variações na qualidade da alimentação;
- descobrir os pontos de estrangulamento da planta;
- investigar as variações de desempenho formulando perguntas;
- identificar operações unitárias que não estão adequadamente entendidas;
- fazer melhor uso daquelas que estão.
- Planta Piloto e Investigações de Laboratório.
- testar modelos teóricos para operações unitárias;
- testar regras de “scale-up” para equipamentos em operação;
- planejar programas experimentais para obter o máximo de informações a partir de experimentos bem planejados.

Cabe lembrar que um simulador somente pode ser efetivo se este fornecer uma descrição válida e confiável sobre as operações da planta.

## 4 | O MODELO DO MINÉRIO

Beneficiamento de minérios é a tecnologia de engenharia de processo que deve necessariamente existir entre a lavra das matérias-primas minerais e o processo de extração subsequente que recupera os metais úteis. O beneficiamento de minério é direcionado inicialmente para a separação de espécies minerais ou grupos de minerais, dentre os vários minerais que constituem o corpo do minério. Minerais são espécies químicas inorgânicas e a variedade de tipos de cristais é grande. Minerais de minério são materiais a partir dos quais são recuperados elementos individuais. Estes estão quimicamente ligados à estrutura cristalina dos minerais.

A extração desses elementos, por rotas de processamento piro- ou hidrometalúrgicas, é onerosa e a ação de concentração dos processos de beneficiamento de minério pode ter um efeito significativo sobre o custo dos processos relativos à metalurgia extrativa. Nenhuma transformação química está envolvida no beneficiamento de minério. Os processos dominantes são aqueles que transformam a natureza física do material e separam o material sólido usando vários atributos físicos dos materiais sólidos.

A natureza cristalina da maioria dos minerais de minério que ocorrem na natureza impõe que os minerais estão presentes em uma mistura aleatória, numa distribuição de tamanhos que varia de poucas dezenas de micron até poucos centímetros. A separação física de uma espécie mineral de outra pode ser atingida pela redução do material sólido a um estado particular, seguido pela separação das partículas por meios físicos. A redução a um estado particular é essencial e a tecnologia de qualquer processo de concentração está intimamente ligada à natureza do material em particular que é produzido pela cominuição do

minério. De fato, a transformação do tamanho do material pelo processo de cominuição é o processo de transformação dominante que será aqui considerado.

Os processos de concentração usados para separar minerais de minério das suas gangas variam de forma impressionante, de acordo com as propriedades físicas dos minerais que afetam a separação dos mesmos. As propriedades físicas mais usadas são peso específico e susceptibilidade magnética dos materiais sólidos. Muitos efeitos químicos perceptivos, notadamente as propriedades químicas das superfícies dos minerais, também são usados para atingir a separação.

A ênfase em todas as tecnologias de beneficiamento de minério está no estado particulado de um material sólido e é a nossa habilidade para separar partículas, umas das outras, que determina o sucesso ou não de uma operação de beneficiamento do minério. Os princípios envolvidos em todas as operações unitárias de interesse estão associadas ao comportamento de partículas individualizadas ou em conjuntos, no equipamento. Nos primórdios da tecnologia de beneficiamento, (os registros históricos datam mais de 200 anos), os processos foram desenvolvidos à base de uma compreensão empírica do comportamento das partículas de materiais sólidos, numa variedade de situações distintas. Durante as últimas três décadas, a ênfase tem sido direcionada para uma análise da mecânica das partículas nas operações unitárias que evoluíram sobre as bases recentes do entendimento empírico. Os princípios básicos da maioria das operações unitárias do beneficiamento de minério estão agora comparativamente bem entendidos e estes princípios básicos podem ser usados para analisar o mecanismo das partículas envolvidas em cada operação unitária. A operação de uma unidade como um todo, é determinada pela soma total do comportamento de todas as partículas sólidas envolvidas no processo de separação.

Um simulador está projetado para explorar as técnicas de modelamento que, por sua vez, são baseadas na mecânica das partículas dentro das operações unitárias do beneficiamento de minério. Os modelos usados em um simulador estão baseados na natureza particulada do material sólido que é processado e, como resultado, modelos complexos podem ser criados e usados para a descrição das operações unitárias.

Essa habilidade para a acomodação de modelos de considerável complexidade dá ao simulador sua versatilidade e potência, e uma compreensão da descrição do material sólido particulado é necessária para que se possam aproveitar, com vantagem, os diversos avanços que têm sido feitos nas técnicas de modelamento, na área de tratamento de minérios, durante as últimas três décadas.

## 5 | O ESTADO PARTICULADO

O estado particulado é definido para descrever um material sólido que está reduzido a partículas que variam de poucos centésimos de micra, a poucos centímetros de diâmetro. Para um material sólido de origem mineralógica, essa variação de tamanho implica que 1 kg de material consistirá de um grande número de partículas (por exemplo, um bilhão de cubos de 10  $\mu\text{m}$  de tamanho). Plantas comerciais de beneficiamento de minério processam muitas toneladas de material bruto, por dia, afim de que um número extremamente elevado de partículas seja produzido.

Embora os modelos de operações unitárias de beneficiamento de minérios sejam baseados no comportamento de partículas individuais dentro do ambiente do equipamento de processo, é bastante fora de propósito tentar descrever a rota de cada partícula individualmente quando estas passam através de uma operação unitária. Muito menos o fluxograma completo de uma planta, com sua multiplicidade de unidades e complexa topologia de fluxos. Este fato, mais do que qualquer outro, determina a estrutura dos dados requeridos, resultando em uma descrição válida dos sólidos particulados e ainda compreensiva o suficiente para que se possam explorar os conceitos básicos de mecânica de partículas, baseada em princípios físicos sonoros.

Devido ao grande número de partículas envolvidas, uma analogia com os princípios utilizados em processamento químico pode parecer atrativa na concepção de modelos para sistemas particulados. Esta analogia é evitada devido a um fato muito significativo: as entidades básicas no processamento químico são moléculas que, para um dado composto, tem propriedades invariáveis, enquanto que no tratamento de minérios as entidades básicas são partículas, e nem duas das quais podem ser idênticas.

Depara-se, então, com o problema de criar-se uma descrição matemática que seja capaz de acomodar uma grande população de partículas, reconhecendo-se a variação das propriedades de cada partícula, individualmente. Felizmente, uma estrutura matemática poderosa que utiliza pesadamente a teoria das probabilidades, está prontamente disponível. Esta estrutura é utilizada como base no desenvolvimento de modelos modernos de operações unitárias de beneficiamento.

A descrição do material particulado está baseada no conceito de função distribuição, que é mais familiar como um descritor para distribuições de tamanhos de partículas. A notação é direta e muito simples, e estabelece as medidas que são feitas em laboratório. Estas funções distribuição estão apresentadas na seção seguinte.



## 6 | DISTRIBUIÇÃO DE TAMANHOS DE PARTÍCULAS

A característica mais óbvia de uma partícula, do ponto de vista do seu comportamento na operação de beneficiamento de minério, é o seu tamanho. O próprio tamanho é muito difícil de ser definido precisamente, mas felizmente o método de descrição a ser usado não requer precisão na definição e na determinação experimental do tamanho da partícula. Um considerável grau de liberdade é admissível, sem comprometer-se a precisão do método.

A medida mais comum do tamanho de uma partícula é a menor malha quadrada que permitirá a passagem da partícula, sob gravidade, com vibração. Tal granulometria é prontamente medida, em laboratório, com precisão suficiente para fins práticos por meio do procedimento usual da análise granulométrica.

A característica essencial da descrição matemática é a função de distribuição de tamanhos  $F(d_p)$ , que pode ser definida da seguinte forma:

$F(d_p)$  = fração em massa de partículas na população que passará pela malha quadrada de lado igual a  $d_p$ .

$F(d_p)$  é uma função ordinária de  $d_p$ , que, todavia tem algumas propriedades importantes que devem sempre estar em mente. Estas propriedades são:

$$F(0) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

$$F(x) \geq F(Y) \text{ sempre que } X \geq Y$$

O valor  $F$  é medido, experimentalmente, num número de tamanhos fixos que correspondem ao tamanho da malha do conjunto de telas de peneira que estão disponíveis no laboratório. Este dado é usualmente apresentado em forma tabular, mostrando o tamanho da malha *versus* a fração menor do que aquela malha.

Representações gráficas são muito úteis e são frequentemente preferidas porque é geralmente mais fácil avaliar e comparar a distribuição de tamanhos de partículas, quando a função é imediatamente visível por inteiro. Uma variedade de sistemas de coordenadas gráficas diferentes tem se tornado popular, visando à elaboração do gráfico da função de distribuição próxima a de uma linha reta. O eixo correspondente ao tamanho das partículas, usualmente a abcissa, é plotado numa escala logarítmica coordenada.

Essa escala trabalha de acordo com a função distribuição  $F(d_p)$ . Considera-se, então, a proximidade de  $F(d_p)$  relativamente às funções log-log; log-normal e Rosin-Rammeler. Papéis milimetrados especiais estão disponíveis para esta finalidade.

As aberturas das malhas em uma série de peneiras padrão variam em progressão geométrica, com a abertura da malha de cada peneira adjacente, segundo um fator constante. O fator constante é usualmente 2 elevado a uma potência fracionada (frequentemente  $\sqrt{2}$ ). Tais séries geométricas serão plotadas segundo uma série de pontos equidistantes numa escala logarítmica.

Embora a função distribuição  $F(d_p)$  seja perfeitamente bem definida e seja possível realizar suas medidas em laboratório, não é diretamente útil para modelagem de operações unitárias de tratamento de minérios. Com esse objetivo, uma função densidade derivada é usada. A função densidade discreta do tamanho da partícula  $f_i(d_p)$  é definida, como segue:

$$f(d_p)\Delta d_p = F(d_p + \Delta d_p) - F(d_p) = \text{a fração em massa da}$$

população de partículas que tem tamanhos entre  $d_p$  e  $d_p + \Delta d_p$ .

$\Delta d_p$  é chamado de intervalo de classe e, normalmente, não é constante. Entretanto, valores sucessivos formam séries geométricas. Isto leva à idéia de classes de partículas, que incluem todas as partículas na população que tem propriedades num intervalo de classe de tamanho estreito. Se o intervalo for suficientemente pequeno, é possível atribuir

um valor simples para a propriedade que define a classe, de maneira que para cada partícula na classe possa ser atribuído um comportamento igual a uma partícula que tenha a propriedade média da classe. No caso de tamanho de partículas, este tamanho representativo é geralmente tomado como a média geométrica, exceto para as duas classes extremas que não têm média geométrica. É usual estender-se as médias geométricas como séries geométricas para as duas classes extremas, e esta é geralmente uma prática satisfatória. Os simuladores operam com as classes individuais de partículas e conseqüentemente, as distribuições de tamanhos de partículas devem ser especificadas na forma diferencial.

**Tabela 1.** Distribuição de tamanhos de partículas no produto de um moinho de bolas.

C1	C2	C3	C4
1	+ 2360	2780	2,4
2	-2360 + 1700	2000	3,1
3	-1700 + 1180	1416	4,0
4	-1180 + 850	1000	5,0
5	-850 + 600	714	6,6
6	-600 + 425	505	9,1
7	-425 + 300	357	13,1
8	-300 + 212	252	16,4
9	-212 + 150	178	12,7
10	-150 + 126	126	7,6
11	-106 + 75	89	4,9
12	-75 + 53	63	3,7
13	-53 + 38	45	2,8
14	-38 + 27	32	1,8
15	-27	22	6,8

C1 - Classes de Tamanhos. C2 - Intervalo de Tamanhos ( $\mu\text{m}$ ). C3 - Tamanho Representativo ( $\mu\text{m}$ ). C4 - Densidade da Distribuição do Tamanho de Partícula (%).

A chave do sucesso dessa aproximação para a modelagem em beneficiamento de minério é o uso de intervalos de classe estreitos, de maneira que o comportamento de todas as partículas, na classe, possa ser realisticamente modelado, usando-se a propriedade média da classe. Isto pode implicar que um grande número de classes de partículas deva ser especificado. Os simuladores são criados especificamente para manusear, eficientemente, um grande número de classes de partículas e são, assim, um veículo ideal para simular fluxogramas de beneficiamento de minérios, usando modelos particulados precisos. O esforço adicional que é requerido para que se possam fazer esses cálculos de forma precisa, é inteiramente removido do usuário. Uma especificação típica da distribuição de tamanhos da alimentação de um de moinho de bolas é mostrada na Tabela 1. Esta é baseada na série padrão  $\sqrt{2}$ , e cobre um intervalo começando em 2,78 mm e terminando em aproximadamente 20  $\mu\text{m}$ , em 15 classes. Um simulador normalmente utiliza, para seus cálculos internos, mais classes de tamanho do que as usadas para especificar a distribuição de tamanho nos fluxos de alimentação do fluxograma.

O Manual do Usuário deve ser consultado para detalhes dos métodos que são usados para especificar as distribuições de tamanho e para selecionar o número de classes de tamanho a ser usado nos cálculos internos.

## 7 | LIBERAÇÃO MINERAL E A DISTRIBUIÇÃO DE TEORES

A composição mineralógica das partículas que são processadas nas operações de beneficiamento de minério varia de partícula a partícula e isto é de grande importância operacional. O objetivo das operações de beneficiamento de minério é a separação das espécies minerais para produzir concentrados com uma maior quantidade relativa do mineral desejado. O objetivo das operações de cominuição é a liberação física dos minerais pela fragmentação. Infelizmente, exceto em casos muito favoráveis, os minerais não se separam completamente e muitas partículas, não importa quão finamente o material é moído, contém uma mistura de duas ou mais espécies minerais. Algumas partículas, certamente, serão compostas de um mineral simples e, neste caso, estarão completamente liberadas. A quantidade de mineral liberado é uma função muito complexa da:

- estrutura cristalina e textura dos minerais;
- interação entre estes e a fratura principal que é induzida pela operação de cominuição.

Esforços consideráveis têm sido devotados à pesquisa do fenômeno da liberação e, nos anos recentes, bons modelos foram desenvolvidos para descrever as características de liberação de um minério. Com o objetivo de permitir uma liberação incompleta das espécies minerais, uma função de distribuição adicional deve ser definida. Porém, é necessário, inicialmente, criar-se um método para a representação da composição mineralógica da partícula.

Quando apenas duas espécies minerais estão envolvidas, por exemplo, um mineral útil e a ganga, isto não é difícil. É necessário especificar apenas a fração mássica ou volumétrica da partícula que compõe o mineral. Normalmente, usa-se o símbolo  $g$  para representar esta fração (o teor da partícula). Quando mais de duas espécies minerais são

relevantes, a situação é mais complicada e  $g$  será um vetor com mais de um componente, onde cada componente representa a fração mássica de espécies minerais simples. A soma das frações deve ser igual à unidade. Para manusear esta complexidade, o conceito de *tipo de partícula* distinta, ou classe, é definido. Como no caso de tamanho de partícula, classes finitas são definidas, onde cada classe é caracterizada por partículas de uma composição mineralógica média. O número de classes que deve ser usado dependerá da complexidade mineralógica e das características de liberação do minério a ser beneficiado no processo simulado. Uma classe é usualmente alocada para cada fase mineral pura que está presente, porque alguns destes minerais poderão estar perfeitamente liberados. Um simulador deve alocar automaticamente tais classes *perfeitamente liberadas*. Entretanto, somente alocará classes de partículas para acomodar minerais não liberados se isto for especificamente requerido pelo usuário. Se tal solicitação é feita, o usuário deve definir a composição das classes que são requeridas para definir cada tipo de partícula. O exemplo mais comum desse esquema para classificação de tipos de partículas são os conhecidos dados de lavabilidade provenientes do fracionamento por densidade do carvão. A análise padrão de lavabilidade separa o carvão em um número de classes estreitas de densidade relativa, onde cada classe pode ser caracterizada pelo teor de cinzas do carvão.

Quanto maior o teor de cinza, maior a densidade relativa. Uma análise típica de lavabilidade para uma amostra de carvão é apresentada na Tabela 2.

**Tabela 2.** Dados típicos de lavabilidade de carvão.

C1	C2	C3	C4	C5
1	F 1, 30	18,64	18,64	4,30
2	1,30 – 1,32	11,15	29,79	5,11
3	1,32 – 1,34	6,67	36,47	6,22
4	1,34 – 1,36	7,12	43,58	7,15
5	1,36 – 1,38	6,87	50,45	9,04
6	1,38 – 1,40	6,22	56,67	10,80
7	1,40 – 1,42	5,47	62,14	12,20
8	1,42 – 1,44	5,04	67,18	13,90
9	1,44 – 1,46	5,02	72,20	16,10
10	1,46 – 1,48	4,60	76,80	17,90
11	1,48 – 1,50	3,77	80,57	21,30
12	A 1, 50	19,42	100,0	40,60

C1 – Tipo de Partícula. C2 – Intervalo de densidade relativa. C3 – Rendimento Fracional (%). C4 – Rendimento Cumulativo (%). C5 – Cinzas (%). F – Flutuado. A – Afundado.

As especificações dos dados requeridos para uso em um simulador, como por exemplo, o MODSIM, são apresentadas na Tabela 3. Observe que nenhuma classe de partícula foi alocada como totalmente liberada, porque partículas de carvão perfeitamente liberadas e sem cinza nunca são observadas na prática.

Para uma simulação correta e confiável de plantas de lavagem de carvão, é necessário especificar a lavabilidade do carvão no maior número possível de frações granulométricas. Um simulador poderá acomodar facilmente tais dados e, de fato, fornecer um desempenho melhorado, à medida que os dados estejam mais completos e detalhados.

**Tabela 3.** Dados provenientes da Tabela 2 especificados no formato adequado para uso no simulador.

C1	C2	C3	C4
1	0,9570 - 0,0430	0,1864	1,10*
2	0,9489 - 0,0511	0,1115	1,31
3	0,9378 - 0,0622	0,0667	1,33
4	0,9288 - 0,0712	0,0712	1,35
5	0,9096 - 0,0904	0,0687	1,37
6	0,8920 - 0,1080	0,0622	1,39
7	0,8878 - 0,1220	0,0547	1,41
8	0,8610 - 0,1390	0,0504	1,43
9	0,8390 - 0,1610	0,0502	1,45
10	0,8210 - 0,1790	0,0460	1,47
11	0,7870 - 0,2130	0,0377	1,49
12	0,5940 - 0,4060	0,1942	1,67*

\*Estimado a partir do gráfico de percentagem de cinza *versus* peso específico

C1 – Tipo de Partícula. C2 – Distribuição Mineral para esse Tipo. C3 – Distribuição de Densidade para esse Tipo de partícula. C4 – Peso Específico para esse Tipo.

Vários formatos para a entrada de dados, adequados para carvão, podem ser oferecidos no simulador. Se a análise imediata está disponível para cada fração de lavabilidade em cada granulometria, o simulador deve oferecer uma interface para entrar-se diretamente com esses dados e o simulador calculará, então, a análise imediata do material em todos os fluxos da planta. Isto resultará numa descrição muito completa da operação de lavagem do carvão. O simulador necessitará, no mínimo, da análise de cinzas para cada fração de



lavabilidade. O simulador poderá, também, manter indicações do poder calorífico e dos teores de enxofre (pirítico e orgânico) em cada fluxo do processo, incluindo os produtos.

Nenhum formato de dados padrão, comparável ao formato utilizado para carvões, é de uso comum para outros sistemas minerais, de maneira que a composição mineralógica deve ser especificada para cada tipo de mineral. Trata-se do espectro de liberação para o minério. Está tornando-se muito comum ver o espectro de liberação para minérios binários especificado em 12 classes de partículas – uma para cada classe de minerais liberados nos extremos do espectro e dez classes que descrevem as partículas mistas em intervalos de 0,1 em g. Minérios com mais de dois componentes minerais devem ser descritos usando-se um maior número de classes de partículas e só recentemente foram desenvolvidos os modelos de liberação para materiais multicomponentes.

O espectro de liberação é uma função do tamanho da partícula. Em geral, quanto mais finas as partículas, maior a probabilidade de encontrarem-se partículas completamente liberadas. É necessário, portanto, especificar a distribuição de material entre os tipos de partículas para cada classe de tamanho. Entretanto, se a planta que está sendo simulada inclui unidades de cominuição, poderá ser suficientemente correto assumir que todo o material da alimentação está concentrado num tipo de partícula que inclui a composição mineral média. A liberação dos minerais será gerada pelo modelo de liberação do simulador, que por sua vez estará associado a cada modelo de unidade de cominuição. O simulador poderá também acomodar variações na distribuição mineral para as classes de teor dos vários tamanhos de partículas nos fluxos de alimentação da planta.

## 8 | PROPRIEDADES FÍSICAS DAS PARTÍCULAS

Todas as operações de beneficiamento dependem de uma ou outra propriedade física para promover a concentração desejada na unidade. Desde que o objetivo do beneficiamento de minério é a separação dos minerais valiosos, torna-se necessário que as propriedades físicas variem de partícula a partícula. A variação das propriedades físicas pode ser considerada especificando-se valores de propriedades físicas para cada tipo (classe) de partícula. Toda e qualquer partícula em uma mesma classe pode ser considerada como possuidora do valor da propriedade física apontada para aquela classe.

A propriedade física mais importante no beneficiamento de minério é o peso específico da partícula. Essa propriedade forma a base para toda a separação gravítica, incluindo meio denso e processos de separação centrífuga. Esses processos de separação respondem pela maior quantidade de material processado em todo mundo, depois da flotação. O peso específico de uma partícula é determinado pela sua composição mineralógica. Assim, o peso específico de uma partícula composta é a soma do peso específico dos minerais constituintes, ponderada pelas frações volumétricas dos componentes minerais. O simulador de processos pode calcular os pesos específicos de cada tipo de partícula, uma vez que a composição mineralógica das partículas tenha sido definida para cada classe de partículas, bem como os pesos específicos dos minerais individuais tenham sido especificados. Esse é o método natural de especificação, porque libera o usuário dos cálculos relativos ao peso específico de cada classe de partículas. Entretanto, em algumas situações não é possível descrever o peso específico de espécies minerais puras. Isto é verdade, por exemplo, no caso do carvão, uma vez que o material carbonoso seja constituído por uma mistura de macerais. Assim, os pesos específicos definidos não podem ser especificados para cada um dos componentes mineralógicos individuais. Nessas circunstâncias, torna-se necessário

determinar o peso específico de cada classe de partícula, através de observações diretas. Esta é, precisamente, a situação com o carvão mineral, onde a função lavabilidade é determinada experimentalmente. O peso específico médio de cada fração lavada é conhecido imediatamente a partir da densidade dos líquidos densos em cada estágio da análise de lavabilidade. Isto está ilustrado na Tabela 3. Um bom simulador deve oferecer alternativas ao usuário, podendo este escolher entre especificar as densidades dos minerais individuais, ou especificar as densidades dos vários tipos de partícula.

Outras propriedades físicas podem ser necessárias e o simulador deve permitir que o usuário especifique tantas quantas forem necessárias para adaptar os modelos que serão finalmente usados na simulação.

## 9 | DISTRIBUIÇÃO DE CONSTANTES CINÉTICAS DE FLOTAÇÃO

O modelo das constantes cinéticas distribuídas para flotação tornou-se amplamente aceito, e um bom simulador deve prover ao usuário uma interface especializada, adequada para a especificação de taxas de cinética distribuídas. Cada tipo de partícula pode estar associada a uma distribuição de constantes cinéticas de flotação. Ao usuário, é solicitado especificar o número total de constantes cinéticas que cobrirão todos os tipos de partícula. A distribuição de partículas nessas classes de cinética de flotação deve ser especificada para cada tipo de partícula. A distribuição para todas as constantes cinéticas deve ser especificada, admitindo-se valores iguais à zero.

Como exemplo, considere a situação nas quais dois minerais devem ser separados por flotação. Assuma que as características mineralógicas e de liberação podem estar adequadamente explicadas pela classificação em três tipos de partículas: mineral liberado, ganga liberada e mista. Muitos sistemas minerais tem um comportamento de flotação que pode ser caracterizado pela classificação de cada tipo de partícula em um componente flotável e um não flotável. É notável que muitos sistemas de flotação podem ser modelados a partir desta base simples. Assumindo-se que esta descrição é adequada para o presente exemplo, quatro constantes cinéticas de flotação serão requeridas e a distribuição de partículas sobre estas constantes, para cada tipo de partícula, pode ser exemplificada na Tabela 4.

**Tabela 4.** Exemplo de distribuição de constantes cinéticas de flotação.

Tipo de partícula	Distribuição de partículas nestas classes cinéticas.			
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
1 – Mineral Liberado	0,8	0,0	0,0	0,2
2 – Mistos	0,0	0,7	0,0	0,3
3 – Ganga Liberada	0,0	0,0	0,5	0,5

Onde  $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4 = 0$

Uma facilidade adicional pode ser fornecida pelo simulador em se considerando a especificação das cinéticas de flotação. Em geral, as constantes cinéticas de flotação para um tipo específico de partícula, variam de banco a banco, no circuito. Isto pode ser atribuído à adição interestágios de reagentes ou mudanças no ambiente químico, à medida que a polpa se move com o concentrado de flotação para os estágios de limpeza. Outro fator que contribui para a variação das constantes cinéticas de flotação é a mudança da natureza da espuma, especialmente na simulação da etapa de limpeza. O usuário pode especificar, se desejar, um valor especial das constantes de cinética de flotação, em um banco arbitrário do circuito de células de flotação. No entanto, a distribuição das partículas nas classes de constantes cinéticas de flotação não poderá ser mudada. Em outras palavras, qualquer partícula que está na classe lenta de cinética de flotação, permanece naquela classe. Somente o valor da constante cinética para aquela classe poderá ser alterado.

## 10 | ALIMENTAÇÃO NA PLANTA E ADIÇÃO DE ÁGUA

O simulador pode acomodar alimentações múltiplas para a planta que está sendo simulada. A caracterização deve ser feita de acordo com os métodos descritos nas seções prévias. O material em todas as alimentações deve ter estruturas de classes idênticas, todavia as distribuições das partículas nas classes podem variar entre os vários fluxos de alimentação. Por exemplo, se a planta recebe uma alimentação de material grosso e uma alimentação de material fino, a distribuição granulométrica será muito diferente para as duas alimentações. Entretanto, ambas devem ter suas distribuições de tamanho especificadas, contra o mesmo tamanho de intervalo de classe. Obviamente, a alimentação grossa não terá nenhum ou muito pouco material nas classes de granulometria fina e a alimentação fina não terá nada nas classes de granulometria grossa. Um bom simulador pode permitir que classes de tamanho diferenciadas sejam especificadas pelo usuário para cada fluxo de alimentação, e traduzir as distribuições especificadas em uma distribuição de tamanhos que é gerada e manipulada somente internamente, pelo próprio simulador. Embora este artifício seja possível para distribuições granulométricas, as distribuições mineralógicas de composição, propriedades físicas, constantes cinéticas, etc. devem ser especificadas em classes idênticas para cada fluxo de alimentação.

A tonelagem e o conteúdo de água, em cada fluxo de alimentação, devem ser especificados. Alimentações secas são permissíveis. Alimentações de água podem ser adicionadas nas unidades misturadoras ou tanques, ou ainda diretamente à uma unidade de processamento.

Duas opções devem ser fornecidas para as especificações de taxas de adição d'água:

- a taxa de adição absoluta pode ser especificada;
- o usuário pode especificar a percentagem de sólidos que é requerida no fluxo que sai do misturador ou tanque, onde a água é adicionada.

No último caso, o simulador ajustará continuamente a taxa de adição d'água, correspondendo à taxa de sólido total calculada na descarga do tanque, mantendo a percentagem de sólidos requerida no produto. Esse dispositivo é muito útil na simulação das ações de controle que são incorporadas para manter o conteúdo de sólidos especificado na polpa, em qualquer ponto no fluxograma.

## 11 | MODELOS PARA OPERAÇÕES DE PLANTAS DE PROCESSAMENTO MINERAL

O desenho (*design*) modular de simuladores de plantas, como o MODSIM, foi desenvolvido, especificamente, para dar ao usuário completa liberdade na escolha de modelos para operações unitárias. A única restrição para os modelos é a necessidade de uma estrutura básica para que o modelo unitário seja capaz de receber, do simulador, os dados da sua própria alimentação, e gerar os dados referentes aos produtos de forma apropriada para transmitir estes dados para o simulador. Isto, obviamente, é a função natural de um modelo unitário, já que espelha o comportamento real da unidade, que transforma a alimentação de material em fluxos de produtos. Os detalhes do material da alimentação fornecidos pelo simulador para a subrotina do modelo deverão estar de acordo com o modelo de partículas minerais, que já foi descrito acima. À subrotina é fornecida a vazão de massa para a unidade em todas as classes (faixas) de partículas definidas. Os parâmetros do modelo unitário, bem como o vetor de propriedades físicas, também serão fornecidos, pelo simulador, para a subrotina do modelo unitário, bem como a vazão d'água. Esta informação dá ao usuário um escopo quase ilimitado para incluir modelos tão simples ou tão complexos quanto desejados para modelar as operações unitárias

### Exemplos de Algumas Simulações Simples

#### EXEMPLO 1 - CIRCUITO DE MOINHO DE BOLAS

Um moinho de bolas opera em circuito fechado com um hidrociclone, que processa a descarga de um moinho de barras a uma taxa de 800 t/h de sólidos. A distribuição granulométrica da alimentação é a descarga do moinho de barras dada na Tabela 1 e a polpa está com 76% de sólidos. O hidrociclone deve ser operado com 50% de sólidos.



O tamanho de moinho dará um tempo de residência de 7 min. O minério pode ser considerado como quartzo tendo um peso específico de 2,67.

Desenhe o fluxograma usando o MODSIM e especifique os dados necessários.

Simule o circuito e obtenha a distribuição granulométrica na alimentação e o produto.

Investigue o efeito do diâmetro do hidrociclone sobre o tamanho de corte  $D_{50}$ .

Investigue circuitos com 1, 2 e 3 hidrociclones, em paralelo.

### **EXEMPLO 2: CÉLULA DE FLOTAÇÃO**

As constantes de flotação associadas ao minério descrito na Tabela 4 são:

$$k_1 = 1,23 \times 10^{-2} \cdot s^{-1}$$

$$k_3 = 8,2 \times 10^{-4} \cdot s^{-1}$$

$$k_2 = 5,12 \times 10^{-3} \cdot s^{-1}$$

$$k_4 = 0$$

Simular a operação de um banco de 4 células *Rougher*. A densidade de polpa na alimentação é 34% de sólidos e o *hold-up* nas células é 450 kg sólido/m<sup>3</sup> de volume de célula. Traçar um gráfico relacionando o teor e a recuperação com o volume da célula variando de 1 a 10 m<sup>3</sup>. A taxa de alimentação da célula é 135 t/h. O efeito do tamanho da partícula sobre a cinética de flotação pode ser ignorado e, pode-se assumir que as partículas não liberadas contenham, em média, 16,8% do mineral de interesse. A alimentação contém 10% do mineral liberado, e 85% de ganga liberada. Um modelo cinético simples com constantes cinéticas distribuídas pode ser usado neste exemplo.

## 12 | POPULAÇÕES DE PARTÍCULAS E FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

O comportamento de um equipamento de separação depende da natureza das partículas individuais que estão sendo processadas. O número de partículas envolvido é muito grande e seria impossível basear as rotinas computacionais em qualquer metodologia que requer uma descrição detalhada do comportamento de cada partícula. A complexidade de tais rotinas seria tal que o desenvolvimento de qualquer modelo prático com alguma utilidade estaria completamente fora de questão. Porém, as características de cada partícula devem ser levadas em conta e modelos úteis não podem ser desenvolvidos enquanto baseados simplesmente nas propriedades médias de todas as partículas na população.

Partículas individuais diferem umas das outras de muitas maneiras; as diferenças que são de interesse no tratamento de minérios são aquelas propriedades físicas que influenciam o comportamento de uma partícula quando sujeita ao tratamento, em qualquer unidade de beneficiamento. As duas propriedades fundamentais mais importantes são o tamanho da partícula e a sua composição mineralógica. Outras propriedades, tais como forma, peso específico, energia de fratura, área superficial, energia superficial e assim por diante, também são importantes e, em muitas operações de concentração podem ser de significância definitiva. As operações de cominuição e classificação são primariamente dependentes do tamanho das partículas, mas a composição, densidade, friabilidade e outras propriedades também podem influenciar o comportamento das partículas nestas operações. Operações de concentração gravítica exploram, basicamente, as diferenças de peso específico entre as partículas e, portanto as espécies minerais diferentes podem ser separadas umas das outras.

As várias propriedades físicas das partículas não são necessariamente independentes umas das outras. Por exemplo, o peso específico de uma partícula pode ser calculado a partir da sua composição mineralógica. Da mesma forma, a energia superficial de uma partícula será especificada pelos componentes minerais que estão expostos na superfície da partícula.

Um sistema definitivo para a descrição suficientemente detalhada das propriedades das partículas na população deve ser construído de forma que, os modelos das operações unitárias sejam suficientemente sensíveis às propriedades individuais das partículas, mas ao mesmo tempo o sistema deve ser suficientemente compreensivo de forma que não seja necessário definir as propriedades de cada partícula, individualmente. Tal sistema é provido por uma descrição que use funções de distribuição.

### **Funções de Distribuição**

A função de distribuição, para uma propriedade qualquer, define quantitativamente como os valores daquela propriedade estão distribuídos entre as partículas da população inteira. Talvez a função de distribuição mais conhecida e mais usada seja a distribuição granulométrica, mais precisamente chamada de distribuição de tamanhos de partículas  $P(d_p)$  definida como a fração em massa das partículas na população com tamanho menor ou igual a  $d_p$ . O símbolo  $d_p$  será usado neste texto para representar o tamanho de uma partícula.

A função  $P(d_p)$  tem várias propriedades importantes:

$$P(0) = 0$$

$$P(\infty) = 1$$

$P(d_p)$  aumenta monotonicamente de 0 a 1, à medida que  $d_p$  aumenta de 0 a  $\infty$ .

As propriedades a) e b) são óbvias porque nenhuma partícula na população pode ter tamanho menor ou igual a zero e todas as partículas na população tem tamanho menor que infinito. A propriedade c) reflete o fato de que a fração da população que tem tamanho menor ou igual a  $d_p^1$  deve conter, no mínimo, todas as partículas de tamanho  $d_p^2$  ou menor, dado que  $d_p^2 \leq d_p^1$ .

Obviamente, o conceito de tamanho de partícula é ambíguo. Partículas que são de interesse no processamento mineral não têm formas regulares definidas, tais como esferas e cubos. O tamanho de uma partícula esférica é, claramente, definido como o diâmetro. Da mesma forma, o tamanho de um cubo pode ser definido, claramente, como o comprimento de um lado, mas outra dimensão poderia ser igualmente bem usada, tal como a diagonal mais longa. O tamanho da partícula não tem um significado único mesmo para partículas com formas regulares. Na tecnologia de processamento mineral uma medida indireta de tamanho é usada. O tamanho de uma partícula é definido como a menor abertura em uma malha quadrada de peneira por meio da qual a partícula poderá passar. Algumas vezes é necessário trabalhar com partículas que são tão pequenas que o método de peneiramento não é adequado para medir o seu tamanho. Então, outras medidas indiretas e apropriadas são usadas, tais como, a velocidade terminal de queda em um fluido de viscosidade e densidade específica conhecidas.

Em aplicações práticas é conveniente e, frequentemente, essencial fazer uso de uma partição discreta da escala de comprimento, de maneira que a população de partícula seja conceitualmente dividida em grupos individualmente identificados pelo menor ou maior tamanho no grupo.

O valor de  $P$  pode ser medido experimentalmente em um número de tamanhos fixos que correspondem ao tamanho da malha do conjunto de peneiras que estão disponíveis no laboratório. Esse dado é usualmente apresentado em forma tabular, mostrando o tamanho da malha contra a fração menor do que a malha. Representações gráficas são proveitosas e são frequentemente preferidas porque é geralmente mais fácil acessar e comparar distribuições de tamanho de partículas, quando a função completa da distribuição é visível. Uma variedade de diferentes sistemas coordenados gráficos tornou-se popular com vistas a elaboração do gráfico função distribuição como uma reta ou próximo a essa. O tamanho do eixo da partícula é usualmente plotado sobre uma escala coordenada logarítmica. A escala coordenada é calibrada de acordo com a função distribuição  $P(dp)$  e está próxima da distribuição especificada. Papéis gráficos estão disponíveis para esse fim e estes podem, facilmente, ser desenhados em computador.

As aberturas das malhas nas séries de peneiras padrão variam em progressão geométrica porque a experiência tem mostrado que tal classificação produzirá, aproximadamente, quantidades iguais de sólidos em cada peneira na análise granulométrica. Assim cada abertura de malha é um fator constante maior do que os anteriores. O fator constante é usualmente  $\sqrt[4]{2}$  ou  $\sqrt{2}$ . As aberturas das malhas em tais séries são usualmente plotadas com pontos equidistantes sobre uma escala logarítmica.

Embora a função distribuição  $P(d_p)$  seja perfeitamente bem definida e acessível para medidas diretas no laboratório, não é diretamente útil para modelamento de operações unitárias de tratamento de minérios. Com esse objetivo é usada a função densidade derivada. A função densidade de tamanho discreto da partícula é usada, como segue:

$$p_i(d_p) = \int_{D_i}^{D_{i-1}} dP(d_p) = P(D_{i-1}) - P(D_i) = \Delta P_i \quad [1]$$

= fração em massa da população de partículas que tem tamanho entre  $D_{i-1}$  e  $D_i$

$p_i(d_p)$  é chamado função densidade discreta fracionada e o argumento  $d_p$  pode ser omitido se não houver risco de confusão com outras grandezas.

$\Delta d_p = D_{i-1} - D_i$  é conhecida como faixa de tamanho e não é usualmente constante, todavia varia de tamanho a tamanho. A largura finita de classe de tamanho definido por  $\Delta d_p$  é muito importante no desenvolvimento das técnicas de modelagem usadas. A idéia de uma classe de tamanho particular é central para o desenvolvimento do nosso procedimento de modelagem. A classe de tamanho é considerada conceitualmente para incluir todas as partículas na população inteira que tem queda de tamanho entre as classes limite  $d_p$  e  $d_p + \Delta d_p$ . É normal designar os limites de uma classe por meio de um subscrito, e de forma que os limites da classe sejam identificados claramente, estes serão sempre representados pelo símbolo  $D_i$ , que indica o limite inferior da classe de tamanho  $i$ . Assim a população inteira de partículas é conceitualmente classificada em cada classe, definidas pelos seus limites superiores e inferiores. Por convenção, o índice das classes cresce a partir de tamanhos maiores para menores. Assim  $D_i \geq D_{i+1}$ . A classe de tamanho máximo tem somente um limite  $D_1$  e inclui todas as partículas que tem tamanho maior do que  $D_1$ .

O conceito de classe de partícula permite-nos efetivamente formular modelos para sistemas metalúrgicos extrativos descrevendo o comportamento de classes de partículas em lugar do comportamento individual. Um tamanho representativo está associado com cada classe de tamanho de partículas, assumindo-se que todas as partículas na

classe comportar-se-ão no presente sistema de processamento como se tivesse um tamanho igual ao tamanho representativo. Claramente, esta só será uma suposição viável se a classe de tamanho é suficientemente estreita. Não é possível definir o conceito "suficientemente estreito", todavia admite-se que a série raiz de dois para os limites de classe é uma relação geométrica que pode ser usada seguramente. A chave para o sucesso desta aproximação, para o modelamento de sistemas particulados, é o uso de intervalos de tamanho estreitos. Isto implica que um número grande de classes de partículas deve ser considerado. Do ponto de vista prático, isto aumenta a quantidade de cálculos que é requerida para que modelos descritivos precisos sejam desenvolvidos para processos particulados. Por conseguinte, essa aproximação requer código eficiente de computador para que seja implementada como uma ferramenta prática e viável, e a nossa ênfase deve ser com respeito à técnicas eficientes de computação.

### Funções de Distribuição Empíricas

Existem várias funções de distribuição empíricas que representam a distribuição de tamanhos de muitas populações de partículas de forma precisa, na prática, e que são úteis em muitas situações. As mais comuns são:

A função de distribuição de **Rosin – Rammler** é definida por:

$$P(D) = 1 - \exp^{-\left(D/D_{63,2}\right)^n} \quad [2]$$

$D_{63,2}$  é o tamanho no qual a função distribuição tem o valor 0,632.

A distribuição **Log-normal** é definida por:

$$P(D) = G\left(\frac{\ln(D/D_{50})}{\sigma}\right) \quad [3]$$

Onde  $G(x)$  é a função

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad [4]$$

chamada função distribuição normal ou gaussiana. É tabulada em muitos livros de referência matemática e estatística e é fácil obter valores para essa função. Na distribuição,  $D_{50}$ , denominado tamanho mediano, é o tamanho da partícula na qual  $P(D_{50}) = 0,5$ . O valor de  $\sigma$  é dado por:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\text{Ln}D_{84} - \text{Ln}D_{16}) \quad [5]$$

A distribuição log-normal tem uma importância teórica particularmente significativa. Em 1941, o famoso matemático A.N. Kolmogorov provou que se uma partícula e sua progênie são quebradas sucessivamente, e se cada evento de quebra produz um número aleatório de fragmentos com tamanhos aleatórios, então, se não há seleção preferencial de tamanho para quebra, a distribuição ou tamanhos de partícula tenderão para uma distribuição normal, após muitos eventos sucessivos de quebra. Embora essa análise teórica faça suposições que são violadas em operações práticas de cominuição, o resultado indica que as populações de partículas que ocorrem na prática, terão distribuições de tamanho próximas da log-normal, caso frequentemente encontrado.

A distribuição **logística** é definida por:

$$P(D) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{D_{50}}\right)^{-\lambda}} \quad [6]$$



Essas três distribuições são funções de dois parâmetros e podem ser ajustadas, completamente, para distribuições de tamanho medidas por técnicas de ajuste de curva.

As mesmas funções têm propriedades geométricas interessantes que podem ser convenientemente usadas em trabalhos práticos.

A distribuição de **Rosin-Rammler** pode ser transformada para:

$$\ln \ln \left( \frac{1}{1-P(D)} \right) = \alpha \ln(D) - \alpha \ln(D^*) \quad [7]$$

Nesta forma, quando plotada em um gráfico de log log recíproco, de  $1-P(D)$  contra o log de  $D$ , produzirá pontos que se ajustam sobre uma linha reta sempre que os dados seguirem a distribuição de **Rosin-Rammler**. Isto define o sistema de coordenadas de **Rosin-Rammler**.

A distribuição **log-normal** pode ser transformada usando uma função inversa  $H(G)$  da função  $G$ . Essa função inversa é definida de uma maneira tal que se

$$G(x) = g \quad [8]$$

$$x = H(g) \quad [9]$$

Substituindo na equação [3].

$$H[P(D)] = \frac{\ln(D/D_{50})}{\sigma} \quad [10]$$

Assim, um gráfico de  $H[P(D)]$  contra  $\log D$  será linear sempre que os dados sigam uma distribuição **log-normal**.

A distribuição logística pode ser transformada para

$$-\log \left( \frac{1}{P(D)} - 1 \right) = \lambda \log D - \lambda \log D_{50} \quad [11]$$

Desta forma os dados plotados no sistema de coordenadas logístico formarão uma linha reta, sempre que a distribuição siga uma distribuição logística. Plotar os dados nestes sistemas de coordenadas é um método conveniente para estabelecer qual a função distribuição que descreve os dados de forma mais acurada.

### Distribuições de Tamanho Truncadas

Algumas vezes, uma população de partículas está abaixo de um tamanho máximo definido. Populações desse tipo ocorrem, por exemplo, quando uma partícula mãe de tamanho  $D'$  é quebrada. Claramente, nenhuma partícula progênita pode ter um tamanho maior do que a partícula mãe, de maneira que a distribuição de tamanhos da população de partículas progênicas é truncada no tamanho  $D'$  da partícula mãe. Assim,

$$P(D') = 1.0 \quad [12]$$

A distribuição truncada mais comum é a distribuição logarítmica.

A função distribuição logarítmica é definida pela função:

$$P(D) = \left(\frac{D}{D'}\right)^\alpha \quad \text{para } D \leq D' \quad [13]$$

que claramente satisfaz a equação [12].  $D'$  é a maior partícula na população e  $\alpha$  é uma medida do espalhamento dos tamanhos das partículas.

Outras distribuições truncadas são as distribuições de Gaudin-Meloy e Harris.

A distribuição de Gaudin-Meloy é definida por:

$$P(D) = 1 - (1 - D/D')^n \quad \text{para } D \leq D' \quad [14]$$

A distribuição de Harris é definida por:

$$P(D) = 1 - \left(1 - (D/D')^s\right)^n \text{ para } D \leq D' \quad [15]$$

Versões truncadas de Rosin-Rammler, log-normal e logística podem ser geradas usando-se uma escala de tamanho transformada. O tamanho é inicialmente normalizado para o tamanho de truncção

$$\xi = D/D' \quad [16]$$

e o tamanho transformado é definido por:

$$\eta = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad [17]$$

A distribuição truncada de Rosin-Rammler é:

$$P(D) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\eta}{\eta_{63.2}}\right)^\alpha\right) \text{ para } D \leq D' \quad [18]$$

A distribuição log-normal truncada é:

$$P(D) = G\left(\frac{\text{Ln}(\eta/\eta_{50})}{\sigma}\right) \quad [19]$$

com

$$\sigma = \frac{1}{2}(\text{Ln}(\eta_{84}) - \text{Ln}(\eta_{16})) \quad [20]$$

A distribuição logística truncada é

$$P(D) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\eta}{\eta_{50}}\right)^{-\lambda}} \quad [21]$$

Gráficos de linha reta podem ser gerados para dados truncados usando sistemas coordenados. A distribuição logarítmica pode ser transformada para:

$$\log[P(D)] = \alpha[\log(D) - \log(D')] \quad [22]$$

e mostra que um gráfico de  $P(D)$  contra  $D$ , com coordenadas log-log, produzirá pontos que se ajustarão sobre uma linha reta, sempre que os dados sigam uma distribuição logarítmica.

A distribuição Gaudin – Meloy pode ser transformada para:

$$\log[1 - P(D)] = n[\log(D' - D) - \log(D')] \quad [23]$$

Os dados resultarão em um gráfico linear, no sistema de coordenadas log-log, se plotados como  $1 - P(D)$  contra  $D' - D$ . Para desenhar este gráfico, é necessário conhecer o valor de  $D'$ , e isto é uma desvantagem.

As distribuições truncadas Rosin-Rammler, log-normal e logística podem ser linearizadas usando um sistema coordenado apropriado como descrito na seção anterior, porém usando  $\eta$  no lugar de  $D$ . Em todo caso, esses gráficos de linha reta somente podem ser construídos após determinar-se o tamanho  $D'$ , onde a distribuição é truncada.

Um conjunto típico de dados, medidos em laboratório, é mostrado na Tabela 5.

**Tabela 5.** Conjunto de dados que define a distribuição de tamanhos de uma população de partículas.

<b>Malha (mm)</b>	<b>Peso Passante (%)</b>	<b>Malha (mm)</b>	<b>Peso Passante (%)</b>
6,80	99,5	0,425	36,7
4,75	97,5	0,300	29,6
3,40	93,3	0,212	23,5
2,36	86,4	0,150	18,3
1,70	76,8	0,106	13,9
1,18	65,8	0,075	10,0
0,850	55,0	0,053	7,1
0,600	45,1	0,038	5,0

### **Função Densidade de Distribuição**

Os dados da Tabela 5 são plotados em cinco sistemas diferentes de coordenadas na Figura 1. É útil, quando plotando manualmente, usar-se um papel de gráfico que já está na escala das coordenadas que são desejadas. A maioria dos papéis para gráfico está disponível comercialmente. É ainda mais conveniente usar-se um pacote de gráficos para computador. Um pacote deste tipo, o PSD, foi desenvolvido especialmente para este tipo de gráficos, e oferece todos os sistemas de coordenadas aqui mostrados, como padrão. Outros aplicativos comercialmente disponíveis, também oferecem gráficos especializados.

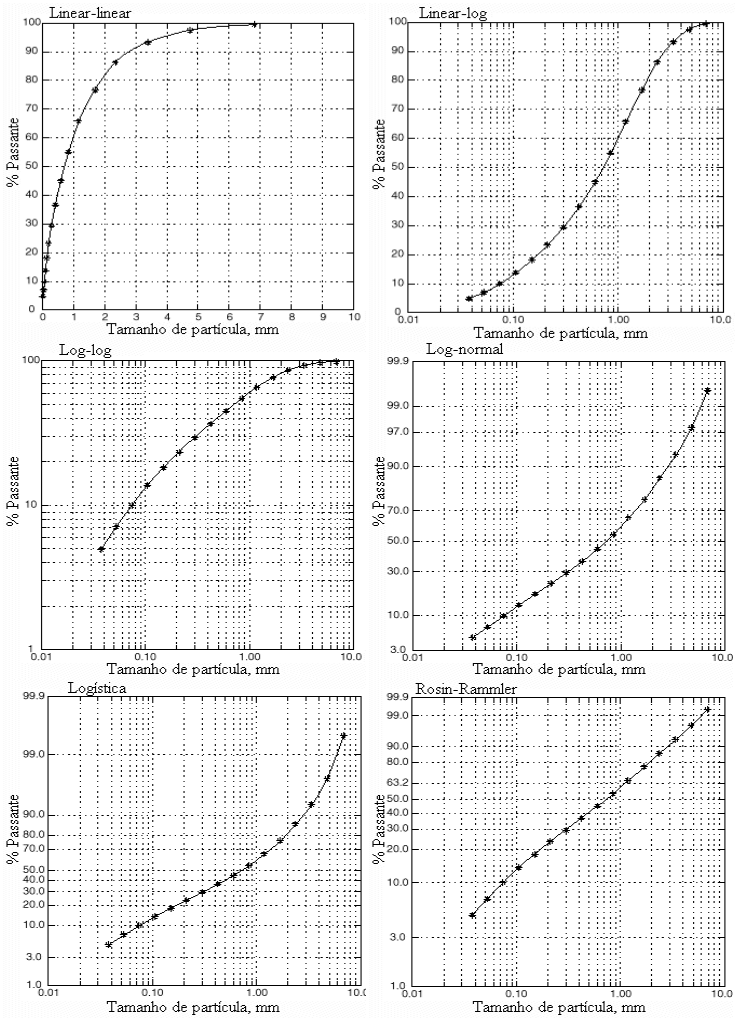
Na maioria dos trabalhos de modelagem teórica é conveniente trabalhar com uma função derivada da função distribuição pela diferenciação. Seja  $x$ , qualquer característica de partícula de interesse.

Então  $P(x)$  é a fração massa da população de partícula que consiste de partículas tendo o valor característico menor do que o igual a  $x$ . A função densidade de distribuição  $p(x)$  é definida por:

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad [24]$$

A função densidade discreta definida na equação [1], está relacionada à função densidade por:

$$p_i = \int_{D_i}^{D_{i-1}} p(x) dx = P(D_{i-1}) - P(D_i) \quad [25]$$



**Figura 1.** Gráficos típicos de distribuição de tamanho de partículas mostrando os dados da Tabela 5 plotados em seis sistemas de coordenadas diferentes.

Uma interpretação comum, todavia imprecisa, da função distribuição densidade é que  $p(x) dx$  pode ser considerada como a fração em massa da população de partículas que consiste de partículas com valor característico num intervalo estreito  $(x, x + dx)$ .

Uma relação integral importante é:

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = P(\infty) - P(0) = 1 \quad [26]$$

indicando que a soma total das frações é a unidade.

### **Distribuição em Número, Média do Tamanho e da População**

Em virtude de todas as populações de partículas conterem um número finito de partículas, é possível também descrever a variação das características das partículas por meio da fração em número. A função distribuição para qualquer característica (tendo valores representados pela variável  $x$ ) é definida como função  $\Psi(x)$  que é a fração em número de partículas na população tendo tamanho igual a  $x$  ou menor. A função densidade associada é definida por:

$$\psi = \frac{d\Psi(x)}{dx} \quad [27]$$

A densidade, em número, discreta é determinada por

$$\psi_i = \Psi(X_{i-1}) - \Psi(X_i) = \Delta\Psi_i \quad [28]$$

onde as letras maiúsculas representam os limites de classe.



Frequentemente é prático ter valores médios para qualquer característica, com a média tomada sobre todos os membros da população. O valor médio de qualquer propriedade característica é dado por:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N_T} \sum_{j=1}^{N_T} x^{(j)} \quad [29]$$

onde:

$x^{(j)}$  é o valor da propriedade característica para a partícula  $j$ ;

$N_T$  é o número total de partículas na população.

A equação [29] é de difícil manuseio porque o somatório deve ser tomado sobre um número elevado,  $N_T$ , de partículas. O número de termos no somatório pode ser reduzido significativamente, se coletarmos partículas que tem valores iguais de  $x$  em um número de grupos distintos. Se o número de partículas no grupo  $i$  é representado por  $n^{(i)}$  e o valor de  $x$  neste grupo é representado por  $x_i$ , então o valor médio da propriedade  $x$  de toda a população é dado por:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^N n^{(i)} x_i \quad [30]$$

onde  $N$  representa o número total de grupos que são formados. A razão  $n^{(i)}/N_T$  é a fração em número da população das partículas com tamanho  $x_i$ . Isto permite uma alternativa, e uma forma ainda mais conveniente, de avaliação da média, dada por:

$$\bar{x}_N = \sum_{i=1}^N x_i \psi_i \quad [31]$$

Outras médias são algumas vezes usadas. Por exemplo, a média poderia ser ponderada pela massa de partículas, em lugar do número.

$$\bar{x} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^N m^{(i)} x_i \quad [32]$$

Na equação [32],  $M_T$  representa a massa total de material na população e  $m^{(i)}$  a massa de partículas na classe  $i$  com valor representativo  $x$ . A razão  $m^{(i)}/M_T$  é a fração em massa de partículas no grupo  $i$ , e esta está relacionada à função distribuição:

$$\frac{m^{(i)}}{M_T} = P(x_{i+1}) - P(x_i) = \Delta P_i \quad [33]$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \Delta P_i \quad [34]$$

$$= \sum_{i=1}^N x_i p_i(x) \quad [35]$$

No limite, quando a largura do intervalo diminui tendendo para zero, esta equação torna-se:

$$\bar{x} = \int_0^1 x dP(x) \quad [36]$$

$$= \int_0^{\infty} x p(x) dx \quad [37]$$

Da mesma forma, a variância da distribuição pode ser obtida:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx \quad [38]$$

A função densidade de distribuição é útil para a avaliação da média de qualquer função de propriedade de partícula  $x$ :

$$\overline{f(x)} = \int_0^{\infty} f(x) p(x) dx \quad [39]$$

Da mesma forma, o valor médio da propriedade,  $x$ , ponderada pelo número, é obtida por:

$$\overline{x}_N = \int_0^{\infty} x \psi(x) dx \quad [40]$$

ou mais geralmente

$$\overline{f(x)}_N = \int_0^{\infty} f(x) \psi(x) dx \quad [41]$$

Por exemplo, se todas as partículas na população são esféricas, a média dos volumes das partículas é o valor médio de  $\pi d_p^3 / 6$ . Assim, a média do volume das partículas vale:

$$\int_0^{\infty} \frac{\pi d_p^3}{6} \psi(d_p) dd_p \quad [42]$$

Visando a possibilidade de descrever o comportamento das partículas adequadamente, introduziu-se o conceito de um tamanho representativo para cada classe de tamanho. O tamanho representativo para a classe de tamanho  $i$  é definido pela expressão:

$$d_{pi}^3 = \frac{1}{\psi_i(d_p)} \int_{D_i}^{D_{i-1}} d_p^3 \psi(d_p) dd_p \quad [43]$$

onde  $\Psi(dp)$  é a função densidade de distribuição em número e  $\Psi_i(d_p)$  é a fração em número da população na classe de tamanho  $i$ . Outras definições do tamanho representativo podem ser usadas e a definição depende do contexto no qual o tamanho representativo será usado. É importante que o tamanho representativo seja tal que, uma simples partícula tendo o tamanho representativo se comportaria de maneira tal que representará adequadamente todas as partículas na classe.

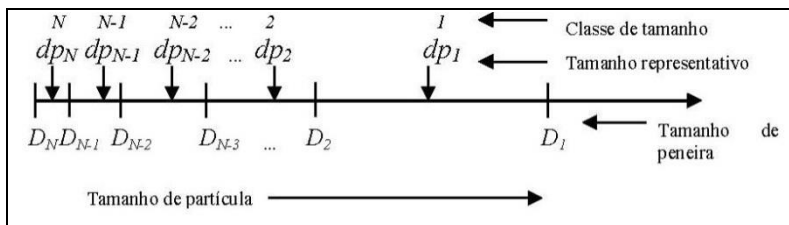
É também possível estimar o tamanho representativo a partir de:

$$d_{pi} = \frac{1}{p_i} \int_{D_i}^{D_{i-1}} d_p p(d_p) dd_p = \frac{1}{p_i} \int_{D_i}^{D_{i-1}} d_p dP(d_p) \quad [44]$$

que pondera as partículas individuais na classe pela massa.

Estas duas definições do tamanho representativo requerem que a função de distribuição de tamanhos seja conhecida antes do tamanho representativo ser estabelecido. Em muitas circunstâncias, isto não será satisfatório porque seria mais conveniente ter as classes de tamanho e seus tamanhos representativos definidos independentemente da distribuição de tamanhos. Um método comum é usar a média geométrica dos limites inferiores e superiores para o tamanho representativo.

$$d_{pi} = (D_i D_{i-1})^{1/2} \tag{45}$$



**Figura 2.** Arranjo de classes de tamanho, com tamanhos representativos  $dp_i$  e tamanhos da malha  $D_i$  ao longo do eixo do tamanho das partículas.

Uma vez que  $D_N = 0$  e  $D_0$  é indefinido, a equação [45] não pode ser usada para calcular os tamanhos representativos das duas classes de tamanho extremo. Esses tamanhos são calculados por meio das expressões:

$$d_{p1} = \frac{(dp_1)^2}{dp_3}$$

$$dp_N = \frac{(dp_{N-1})^2}{dp_{N-2}} \tag{46}$$

Essas fórmulas projetam a sequência  $dp_i$  como uma progressão geométrica nas duas classes de tamanhos extremos.

Os arranjos da malha e tamanhos representativos são mostrados na Figura 2.

A composição mineralógica das partículas que são processadas nas operações de tratamento de minérios varia de partícula a partícula. Isto é de fundamental importância em qualquer processo de separação física para material particulado. O objetivo dos processos de tratamento de minérios é a separação de materiais, na base da composição mineralógica, para produzir concentrados com abundância relativa do mineral desejado. O objetivo de operações de cominuição é a liberação de minerais pela fragmentação. Infelizmente, exceto em casos muito favoráveis, os minerais não separam completamente e muitas partículas, mesmo quando finamente moídas, conterá uma mistura de duas ou mais espécies minerais. No entanto, algumas partículas constituídas de um único mineral, sempre existirão. Nesse caso, diz-se que estas partículas estão perfeitamente liberadas. A quantidade de mineral que está liberado é uma função muito complexa envolvendo a:

- estrutura cristalina,
- textura mineralógica;
- interação entre (i) e (ii);
- o padrão de fratura na cominuição.

A composição mineralógica da partícula pode ser definida, sem ambigüidade, pela composição fracional das partículas em termos dos componentes minerais individuais, que forem de interesse. Geralmente, mais de uma espécie mineral deve ser considerada, de maneira que a composição mineralógica seja descrita pelo vetor  $g$  das

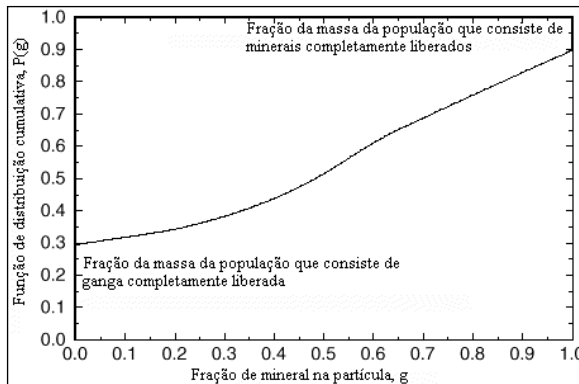
frações minerais. Cada elemento do vetor  $g$  representa a fração, em massa, do material correspondente na partícula. O número de elementos no vetor é igual ao número de minerais, incluindo os minerais de ganga. Assim, numa partícula que é constituída por:

- 25% em massa de calcopirita;
- 35% em massa de esfalerita;
- 40% em massa de ganga;

será representada por um *vetor fração mineral*  $g = (0,25; 0,35; 0,40)$ .

Várias classes discretas de teor de minerais podem ser definidas, e o intervalo de cada fração, isto é, a faixa de teor de cada componente do vetor  $g$ , deve ser especificada para cada classe de teor. A função distribuição fracional discreta pode ser definida como demonstrado anteriormente para qualquer propriedade.

Existe uma classe especial para as frações de teor de minerais nas extremidades do espectro de composição. Nas operações de tratamento de minérios é usual trabalhar com populações de partículas que contém alguma porção do mineral completamente liberado. Assim, uma fração, diferente de zero, da população de partículas, pode ter um teor de mineral exatamente igual a zero ou exatamente igual a unidade. Uma classe individual deve ser reservada para cada um destes grupos de partículas liberadas. Essas classes têm intervalos de largura zero. Se apenas um mineral valioso é considerado importante,  $g$  é uma grandeza escalar e a função distribuição  $P(g)$  terá a forma mostrada na Figura 3.



**Figura 3.** Função típica da distribuição de teores de partícula em uma população com partículas liberadas e não liberadas.

A concentração de partículas nas duas classes extremas, representando a ganga completamente liberada e o mineral completamente liberado, respectivamente, são representadas pelos degraus descontínuos na função de distribuição. Quando mais de um mineral é significativamente importante, a simples representação gráfica usada na Figura 3 não pode ser usada, sendo necessária, nesses casos, uma descrição multidimensional.

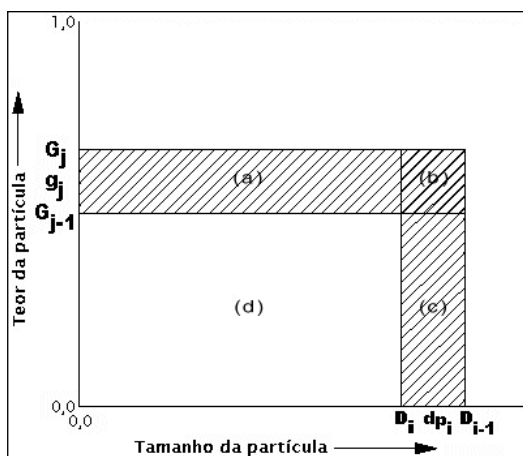
### A Função Distribuição Conjunta

Frequentemente, ocorre que mais de uma propriedade da partícula é significativa, influenciando seu desempenho numa operação de tratamento de minérios. Nesse caso, é essencial usar uma descrição da população de partículas que leva em consideração todas as propriedades relevantes. A descrição apropriada é fornecida pela função distribuição conjunta. Se as duas propriedades dizem respeito ao tamanho e a composição mineralógica, a função distribuição conjunta,  $P(d_p, g)$ , seria definida como a fração em massa do total da

população de partículas que tem tamanho  $\leq d_p$  e fração mineral  $\leq g$ . Apenas como propriedades únicas, a população pode ser dividida em um número finito de grupos discretos, onde cada grupo é identificado por um único par de variáveis  $g$  e  $d_p$ . Assim, o espaço das variáveis  $g$  e  $d_p$  pode ser seccionado em uma grade retangular, e a função densidade de distribuição fracional discreta é definida por:

$p_{ij}(d_p, g)$  = fração de material com tamanho no intervalo  $(D_i, D_{i-1})$  e composição no intervalo  $(G_{j-1}, G_j)$ .

= fração em massa de material na área (b) na Figura 4



**Figura 4.** Relação entre função densidade de distribuição fracional discreta e função distribuição cumulativa bi-dimensional.

A relação entre a função densidade de distribuição fracional discreta e a função de distribuição cumulativa bi-dimensional está representada na Figura 4.

$P(D_{i-1}, G_j)$  = fração do material nas áreas a + b + c + d.



$P(D_i, G_{j-1})$  = fração do material na área d.

$P(D_i, G_j)$  = fração do material na área a + d.

$P(D_{i-1}, G_{j-1})$  = fração de material na área c + d.

Portanto,

$$P_{ij}(d_p, g) = P(D_{i-1}; G_j) - P(D_i; G_j) - P(D_{i-1}; G_{j-1}) + P(D_i; G_{j-1})$$

que é a fração massa da população de partículas que tem:

$$D_i \leq d_p \leq D_{i-1} \quad \text{e} \quad G_{j-1} \leq g \leq G_j$$

As idéias desenvolvidas acima para a distribuição bi-dimensional podem, de forma similar, ser expandidas para dimensões maiores. Em particular, tal extensão seria requerida para um vetor  $g$  de composição multidimensional, se mais de uma espécie mineral está presente.

É claro, a partir de sua definição, que o valor de  $p_{ij}(d_p; g)$  não varia, se a ordem de seus argumentos  $d_p$  e  $g$ , e conseqüentemente os índices  $i$  e  $j$  variam.

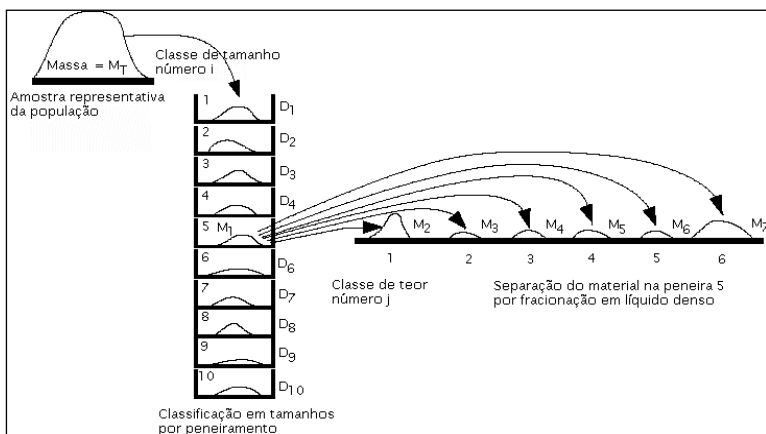
Assim,

$$P_{ij}(d_p; g) = P_{ji}(g; d_p) \quad [47]$$

## A Função de Distribuição Condicional

Quando se trata da coleção de partículas, é conveniente separá-las em grupos de acordo com uma única propriedade, a despeito da variabilidade de outras propriedades importantes entre as partículas. Um exemplo óbvio disto, é uma classificação por tamanhos que é feita por peneiramento em laboratório. A separação em classes granulométricas ocorre, a despeito de qualquer distribuição de composição mineralógica, de maneira que, partículas, diferindo

amplamente na composição, ficarão presas na mesma peneira de teste. As massas de material retidas em diferentes peneiras terão distribuições de composição diferentes. Por exemplo, a fração de partículas na classe granulométrica mais fina será relativamente rica em material completamente liberado. Existe uma distribuição de composição única para cada uma das classes granulométricas. O peneiramento é chamado de operação condicionante, e a função distribuição para cada classe granulométrica é denominada função distribuição fracional condicional.



**Figura 5.** Representação esquemática da medida da distribuição dos teores das partículas, condicionada pelo tamanho das partículas.

O conceito de distribuição condicional é ilustrado esquematicamente nas Figuras 5 e 6. Na Figura 5 uma amostra representativa da população de partículas é peneirada e é, desse modo, separada nas classes de tamanho requeridas. O material em cada peneira é então fracionado com base no conteúdo mineral de cada partícula, usando-se, por exemplo, fracionamento em líquido denso. As duas

funções de distribuição discretas são definidas em termos das massas de material produzido por essas duas operações sequenciais.

$$p_{35}(g, d_p) = \frac{M_4}{M_T} \quad [48]$$

$$p_{35}(g|d_p) = \frac{M_4}{M_1} \quad [49]$$

e

$$p_5(d_p) = \frac{M_1}{M_T} \quad [50]$$

É fácil de ver que

$$p_{35}(g|d_p) = \frac{M_4}{M_1} = \frac{M_4/M_T}{M_4/M_T} = \frac{p_{35}(g, d_p)}{p_5(d_p)} \quad [51]$$

e que  $p_{35}(g|d_p)$  mostra como o material na peneira 5 está distribuído com respeito à composição das partículas.

Na Figura 6 a separação é feita, primeiramente, com base no conteúdo mineral, e então cada classe de teor de partícula é classificada por peneiramento. Isto produz a distribuição de tamanhos, condicionada pelo teor de partícula.

$$p_{53}(d_p|g) = \frac{M_6'}{M_1'} = \frac{M_6'/M_T}{M_1'/M_T} = \frac{p_{53}(d_p, g)}{p_3(g)} \quad [52]$$

É claro que

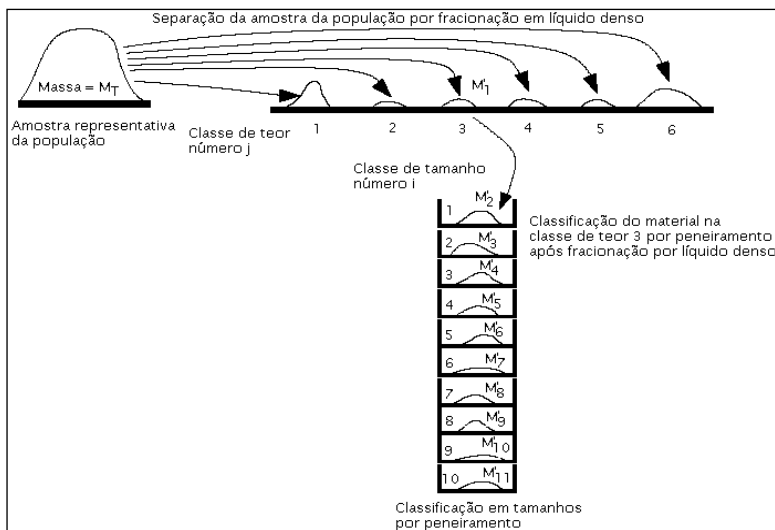
$$M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 = M_1 \quad [53]$$

de maneira que

$$\sum_{j=1}^6 p_{ji}(g|d_p) = 1 \tag{54}$$

e

$$\sum_{j=1}^6 p_{j5}(g, d_p) = p_5(d_p) \tag{55}$$



**Figura 6.** Representação esquemática da medição de distribuição de tamanhos de partícula, condicionada pelo teor de partícula.

Estas idéias podem ser generalizadas para desenvolver as seguintes relações. Se  $M$  é a massa da população, a massa de partículas que cai nas duas classes  $j$  e  $i$  simultaneamente é tão somente  $M p_{ji}(g, d_p)$ . Quando esta é expressa como uma fração somente daquelas partículas na classe  $d_p$ , isto é  $M p_i(d_p)$ , a distribuição condicional é gerada.

Assim

$$p_{ij}(g|d_p) = \frac{M p_{ji}(g, d_p)}{M p_i(d_p)} = \frac{p_{ji}(g, d_p)}{p_i(d_p)} \quad [56]$$

A equação [57] é importante, principalmente porque ela proporciona um meio para a determinação da importante função teórica de distribuição discreta conjunta  $p_{ji}(g, d_p)$ , a partir da função distribuição condicional discreta, observável experimentalmente,  $p_{ji}(g|d_p)$ .

$$p_{ji}(g, d_p) = p_{ji}(g|d_p) p_i(d_p) \quad [57]$$

Desde que

$$p_{ji}(g, d_p) = p_{ij}(d_p, g) \quad [58]$$

observamos que

$$p_{ji}(g, d_p) = p_{ij}(d_p|g) p_j(g) \quad [59]$$

e

$$p_{ji}(g|d_p) p_i(d_p) = p_{ij}(d_p|g) p_j(g) \quad [60]$$

A equação [58] corresponde a um procedimento experimental no qual a população de partículas é, primeiro separada com base no tamanho, por peneiramento, seguida de uma separação de cada fração peneirada em vários grupos de composição.

A equação [61] corresponde a uma separação baseada na composição (magnética, eletrostática, ou talvez técnicas de líquido denso) seguida de análise granulométrica em peneiras para cada classe de composição.

De uma ou de outra forma, a mesma função distribuição conjunta é gerada, porém o procedimento experimental refletido na equação [58], na maioria das vezes, é menos conveniente que o correspondente na equação [61], devido às dificuldades experimentais associadas à separação por composição. Normalmente, é mais eficiente combinar uma separação por composição com muitas separações por tamanho (que são comparativamente simples para fazer no laboratório).

As funções densidade satisfazem as relações gerais a seguir, que podem ser facilmente verificadas usando os mesmos simples princípios.

$$\sum_i \sum_j p_{ij}(x,y) = 1 \quad [61]$$

$$\sum_j p_{ij}(x,y) = \sum_j p_{ij}(x|y)p_j(y) = p_i(x) \quad [62]$$

$$\sum_i p_{ij}(x,y) = \sum_i p_{ji}(y|x)p_j(x) = p_j(y) \quad [63]$$

$$\sum_i p_{ij}(x|y) = 1 \quad [64]$$

Os princípios desenvolvidos nesta seção podem ser usados para definir a função distribuição condicional  $P(g|d_p)$ , bem como a função densidade associada  $p(g|d_p)$ . Estas estão relacionadas por:

$$p(x|y) = \frac{dP(x|y)}{dx} \quad [65]$$

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad [66]$$

e satisfazem às seguintes relações, análogas às equações [62] a [65]

$$\iint p(x,y) dx dy = 1 \quad [67]$$

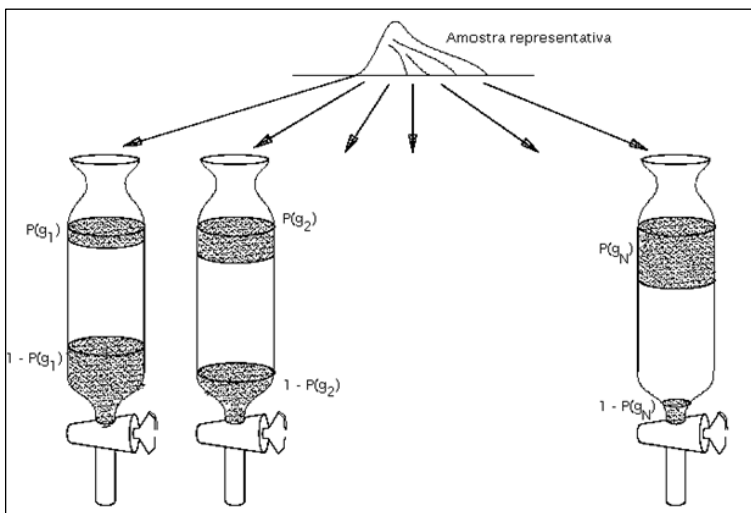
$$\int p(x,y) dy = p(x) \quad [68]$$

$$\int p(x,y) dx = \int p(y|x) p(x) dx = p(y) \quad [69]$$

$$\int p(x|y) dx = 1 \quad [70]$$

### **Exemplo prático das distribuições condicionais de teor – A curva de lavabilidade**

Distribuições condicionais de teor têm sido usadas, por muitos anos, em práticas de processamento mineral e vários métodos de representação padrão foram desenvolvidos. Dentre esses, o mais amplamente usado é a distribuição de lavabilidade e a curva de lavabilidade associada. Esse método foi desenvolvido, inicialmente, para analisar operações de lavabilidade de carvão, e baseia-se no uso de uma sequência de líquidos orgânicos de densidades diferentes, usualmente num intervalo de 1.200 kg/m<sup>3</sup> a 3.200 kg/m<sup>3</sup>, embora líquidos mais densos possam ser sintetizados e utilizados para este fim. O método de fracionamento depende de uma separação cuidadosa das frações afundada e flutuada da amostra representativa, imersa em um líquido de densidade conhecida. A fração que flutua representa a fração da população de partículas de densidade menor do que a do líquido teste. Se a composição de partículas pode ser relacionada diretamente com a densidade das partículas, a fração medida é igual à distribuição cumulativa  $P(g)$ . É prática comum realizar o teste de líquido denso com frações granulométricas específicas, e neste caso a distribuição de teor cumulativa condicional  $P(g|d_{pi})$  é gerada no experimento.

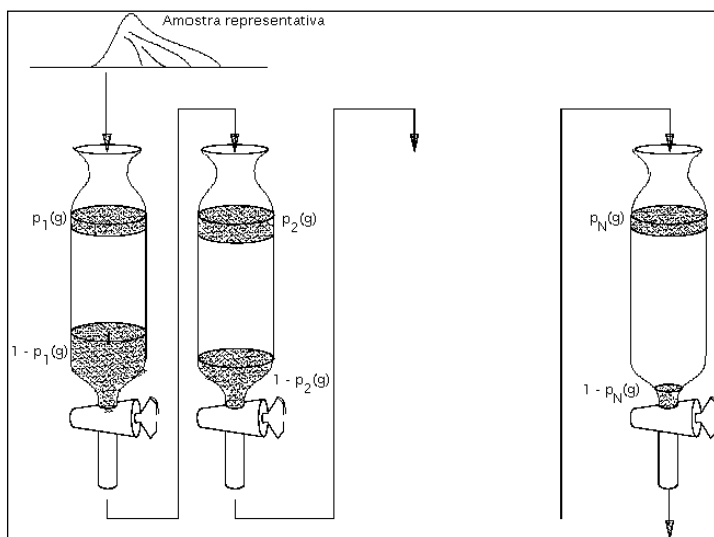


**Figura 7.** Representação de experimento de líquido denso. O método paralelo gera a distribuição cumulativa  $P(g)$ . Se uma fração granulométrica em particular é usada, este teste gera a distribuição condicional  $P(g|d_p)$ .

O valor da função distribuição cumulativa pode ser medida em valores diferentes de  $g$ , usando-se uma série de líquidos cujas densidades são ajustadas para corresponder a um teor específico, embora seja mais comum estabelecerem-se as densidades dos líquidos com base em um padrão regular, conveniente para o material de teste. O teste de fracionamento (separação) em líquido denso é ilustrado na Figura 7. Tendo em vista que amostras representativas idênticas da população de partículas são analisadas em paralelo, este método de análise é denominado de método paralelo.

Um método alternativo para essa análise é frequentemente usado porque usa quantidades menores de amostra, e também produz informação adicional que é particularmente vantajosa na análise e simulação de operações de processamento mineral.





**Figura 8.** Representação do experimento de fracionamento em líquido denso. O método sequencial gera a distribuição discreta  $p_j(g)$ . Se uma determinada fração granulométrica é usada, este teste gera a distribuição discreta  $p_j(g_j|d_p)$ .

Ao invés de analisar  $N$  amostras idênticas em  $N$  densidades diferentes, uma única amostra é separada sequencialmente em  $N$  densidades diferentes. A fração afundada do primeiro teste é testada na próxima maior densidade, após a qual, o afundado do segundo teste passa para o terceiro líquido e assim por diante, até as separações em todas as  $N$  densidades terem sido completadas. Este método é ilustrado na Figura 8.

Cada fração flutuada é coletada e, após remoção de algum líquido aderido, está disponível para as análises posteriores. Análises adicionais que podem ser feitas incluem a densidade média de partículas por picnometria, análise elementar por fluorescência de Raios X ou espectrometria de absorção atômica e análise granulométrica de partículas, se uma granulometria (tamanho) composta é usada.

Um conjunto típico de dados obtidos em um teste de líquido denso é mostrado na Tabela 6.

A fim de converter os dados obtidos no teste de líquido denso para distribuição com respeito à composição de partícula é necessário relacionar a densidade da partícula à sua composição mineralógica. Se o material é uma simples mistura de dois componentes minerais, isto é:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g}{\rho_M} + \frac{1-g}{\rho_G} \quad [71]$$

onde:

$\rho$  = densidade de uma partícula

$\rho_M$  = densidade da fase mineral

$\rho_o$  = densidade da fase ganga

$g$  = fração massa do mineral na partícula

**Tabela 6.** Dados típicos obtidos em teste de líquido denso.

Líquido de densidade específica	Recuperação em massa na fração (%)	% CaO	% SiO <sub>2</sub>
Flutuado em 2,85	21,60	19,30	18,2
2,85 – 2,88	5,70	21,76	2,49
2,88 – 2,91	3,20	10,15	1,52
2,91 – 2,94	0,90	9,67	2,92
2,94 – 2,96	7,60	2,95	3,89
2,96 – 3,03	61,0	0,96	2,55
Afundado em 3,03	0,00	-	-

O inverso desta equação é de uso mais prático:

$$g = \frac{\rho_G - \rho}{\rho_G - \rho_M} \frac{\rho_M}{\rho} \quad [72]$$

a qual mostra que o teor mineral é uma função linear da recíproca da densidade da partícula.

Quando a textura mineralógica é mais complexa do que uma simples mistura binária de dois minerais, torna-se necessário, a partir do teste de meio denso, relacionar a composição da partícula à densidade de separação. Isso requer também, a análise elementar das frações individuais obtidas no teste de líquido denso sequencial. Dados típicos são mostrados na Tabela 6. A partir dos resultados obtidos nos ensaios, a composição mineralógica média das partículas em cada fração pode ser estimada. Nesse caso, o teor de calcita é estimado a partir do CaO analisado e a magnesita cometida é estimada por diferença, assumido que somente três minerais (magnesita, calcita e quartzo) estão presentes. A relação entre a densidade da partícula e sua composição mineralógica é

$$\rho^{-1} = \sum_{m=1}^M g_m \rho_m^{-1} \quad [73]$$

Se os intervalos de densidade usados no teste de líquido denso são estreitos, é razoável postular que a densidade média das partículas em cada fração de densidade é um ponto médio entre os pontos extremos dos intervalos.

As densidades, calculadas a partir da composição mineralógica e as densidades dos minerais, devem corresponder muito aproximadamente às densidades médias dos extremos de cada intervalo, como mostrado na Tabela 7.

**Tabela 7.** Dados derivados a partir daqueles obtidos na Tabela 6.

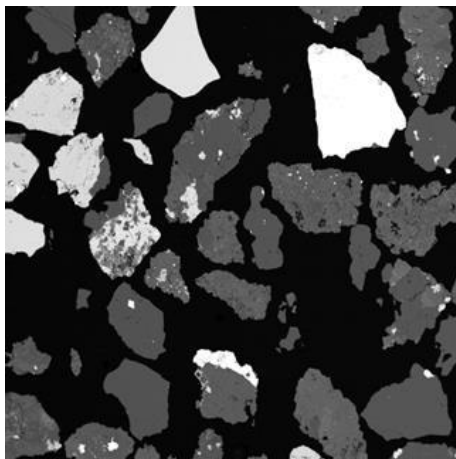
Líquido de densidade específica	Magnesita (%)	Calcita (%)	SiO <sub>2</sub> (%)	Densidade calculada kg/m <sup>3</sup>
Flutuado em 2,85	47,34	34,46	18,2	2.828
2,85 – 2,88	58,65	38,86	2,49	2.867
2,88 – 2,91	80,36	18,13	1,52	2.935
2,91 – 2,94	79,81	17,28	2,92	2.933
2,94 – 2,96	90,85	5,26	3,89	2.968
2,96 – 3,03	95,74	1,71	2,55	2.985
Afundado em 3,03	-	-	-	-

No caso do carvão, é praxe determinar os teores de cinza e enxofre das frações da lavabilidade. É também comum medir a energia contida das frações, porque isto tem uma importância fundamental na avaliação do uso do carvão para geração de energia. Igualmente, maiores detalhes, considerando os constituintes do carvão, podem ser obtidos, caso seja determinada a análise imediata completa para cada fração da lavabilidade. É também possível distinguir o enxofre pirítico no carvão. Quanto maior o detalhamento da análise das frações de lavabilidade, maior o detalhamento dos produtos que podem ser calculados pelo modelamento e simulação.

### **Determinação da Distribuição de Teores por Análise de Imagem**

Ao final do século XX, foram desenvolvidos métodos mais diretos de determinação do espectro de liberação dos minerais, usando a análise automática de imagem. Essa técnica fornece uma medida direta das distribuições dos teores de partículas em uma amostra, a partir de uma fração estreita da faixa granulométrica. A técnica requer a geração de imagens microscópicas de partículas, que são montadas em

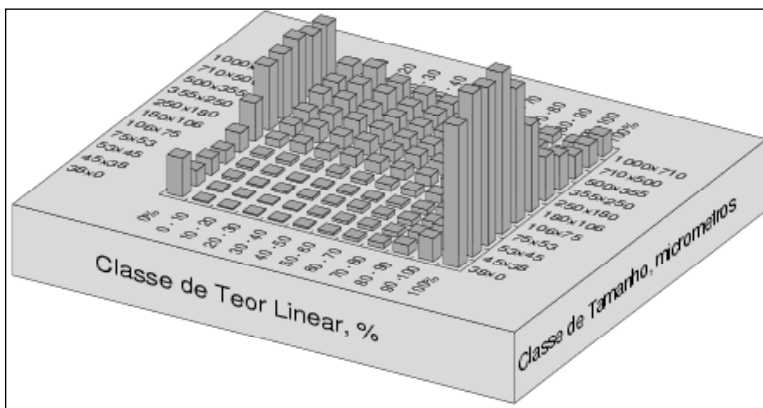
orientações aleatórias e a seguir seccionadas. As imagens que são geradas pelo microscópio eletrônico de varredura-MEV devem definir cada fase mineral a ser medida. Uma imagem típica de um sistema mineral binário é mostrada na Figura 9.



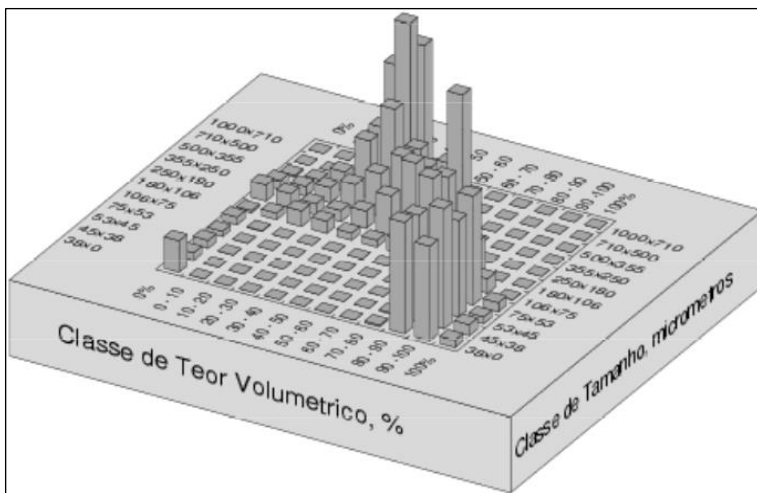
**Figura 9.** Imagem de microscópio eletrônico de uma seção de partículas minerais mostrando as fases discriminadas.

O teor aparente de cada seção de partícula na imagem pode ser prontamente determinado quando a imagem é arquivada na forma digital. O teor aparente, relativo à seção de uma partícula, é a relação da concentração de pontos (*pixels*) da fase mineral e a concentração total de pontos na seção.

Alternativamente, pode ser medido o teor aparente de muitas seções transversais de partículas. Isso consiste simplesmente em estabelecer a distribuição linear aparente ou o teor relativo às imagens contendo um número suficientemente grande de seções de partículas. Na Figura 10 são mostrados histogramas típicos da distribuição de teores lineares medida.



**Figura 10.** Distribuição de teores lineares medidos pela análise de imagem de várias imagens. Foram analisadas onze frações granulométricas distintas.



**Figura 11.** Distribuição de liberação de 11 frações granulométricas de partículas de 2 componentes de um minério, medida por análise de imagem. Esses histogramas foram obtidos por conversão estereológica dos dados mostrados na Figura 10.

Esses histogramas são baseados em 12 classes de teor que descrevem a ganga pura na classe 1, mineral puro na classe 12 e 10 classes de teor espaçadas igualmente, nas frações de teor que variam entre 0,0 a 1,0. Observe que 11 frações granulométricas distintas foram analisadas.

As distribuições de teor aparente medidas devem ser estereologicamente corrigidas para convertê-las às distribuições de teor desejadas. A conversão estereológica é um problema inverso típico e requer a solução de uma equação integral.

$$P(g_m|d_p) = \int_0^1 P(g_m|g, d_p) p(g|d_p) dg \quad [74]$$

onde  $g_m$  representa o teor aparente medido, linear ou relativo à área, e  $g$  representa o teor verdadeiro de uma partícula.  $P(g_m|d_p)$  é a distribuição cumulativa de teores aparentes medida na imagem. A solução da equação [75] requer cuidados consideráveis para assegurar respostas confiáveis, entretanto métodos de resolução estão disponíveis. Na Figura 11, após conversão estereológica dos dados da Figura 10, é mostrado um histograma da verdadeira distribuição volumétrica de teores de partículas da amostra.

## Independência

Acontece que algumas vezes duas propriedades podem ser distribuídas independentemente uma da outra. Esta idéia pode se tornar precisa, definindo-se a independência de duas propriedades, digamos  $k$  e  $d_p$ , se a seguinte relação é satisfeita.

$$p_{ji}(k|d_p) = p_j(k) \quad [75]$$

Isto significa que a distribuição dos valores de  $k$  (que poderiam representar as constantes cinéticas de flotação, por exemplo) é igual para qualquer classe de tamanho da população de partículas.

Isso leva a

$$p_{ji}(k, d_p) = p_j(k|d_p)p_i(d_p) = p_j(k)p_i(d_p) \quad [76]$$

na qual a distribuição conjunta para as duas propriedades, que são independentes, pode ser gerada como o produto de duas funções de distribuição distintas.

### Distribuições em Número

Em algumas situações é conveniente usar frações em número ao invés de fração em massa, quando se trabalha com populações de partículas. A relação entre as funções de distribuição em massa e a função de distribuição em número equivalente pode ser deduzida como segue.

A função  $\Psi(d_p)$  de distribuição em número é definida como a fração em número de partículas na população inteira, com tamanho  $\leq d_p$ . As funções de distribuição em número e as funções densidade de distribuição, em número, podem ser para cada um dos tipos de distribuição já definidas para as frações em massa. Em particular, a função distribuição fracional discreta, em número, é definida por:

$$\psi(dp) = \frac{\text{número de partículas na classe de tamanho } i}{\text{número total de partículas na população}} = \frac{n_i(d_p)}{N} \quad [77]$$

As distribuições em número podem ser relacionadas às distribuições em massa da seguinte forma.



Define-se:

$\Psi(m) dm$  = fração em número de partículas tendo massa em  $(m, m + dm)$ .

$\psi(m|d_p) dm$  = fração em número de partículas de tamanho  $d_p$ , tendo massa em  $(m, m + dm)$ , que é a distribuição densidade para a massa da partícula, condicionada pelo tamanho da partícula.

$p_i(d_p)$  = fração em massa de partículas na classe de tamanho  $i$ .

$m$  = massa de uma partícula de tamanho  $d_p$ .

$\bar{m}(d_p)$  = massa média de uma partícula de tamanho  $d_p$ .

$M$  = massa total de partículas na população.

$N$  = número total de partículas na população.

Então, desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
 M p(d_p) &= N \int_0^{\infty} m \Psi(m, d_p) dm \\
 &= N \int_0^{\infty} m \Psi(m|d_p) \Psi(d_p) dm \\
 &= N \Psi(d_p) \int_0^{\infty} m \psi(m|d_p) dm \\
 &= N \psi(d_p) \bar{m}(d_p) \quad [78]
 \end{aligned}$$

Usando [25],

$$\begin{aligned}
 M p_i(d_p) &= M \int_{D_i}^{D_{i-1}} p(d_p) dd_p \\
 M p_i(d_p) &= N \int_{D_i}^{D_{i-1}} \psi(d_p) \bar{m}(d_p) dd_p \quad [79]
 \end{aligned}$$

Se a forma da partícula é estatisticamente independente do tamanho, (uma boa aproximação para populações de partículas simples) então:

$$\beta = \frac{\bar{m}(d_p)}{d_p^3} = \frac{\bar{m}(d_{pi})}{d_{pi}^3} \quad [80]$$

é constante, independentemente do tamanho.

A equação [80] pode ser simplificada usando as equações [81] e [43].

$$\begin{aligned} M p_i(d_p) &= N \frac{\bar{m}(d_{pi})}{d_{pi}^3} \int_{D_i}^{D_{i-1}} d_p^3 \psi(d_p) dd_p \\ &= N \bar{m}(d_{pi}) \psi_i(d_p) \end{aligned} \quad [81]$$

A relação entre  $N$  e  $M$  é obtida a partir de

$$\begin{aligned} M &= M \sum_i p_i(d_p) = N \sum_i \bar{m}(d_{pi}) \psi_i(d_p) \\ \frac{M}{N} &= \sum_i \bar{m}(d_{pi}) \psi_i(d_p) \quad [82] \\ &= \beta \sum_i d_{pi}^3 \psi_i(d_p) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{M}{N} = \beta \int_0^{\infty} d_p^3 \psi(d_p) dd_p \quad [83]$$

onde a equação [81] foi usada.

Substituindo a equação [84] na equação [82], uma relação exata entre a distribuição discreta pela massa  $p_i(d_p)$  e a distribuição discreta pelo número  $\psi_i(d_p)$  é obtida.

$$p_i(d_p) = \frac{d_{pi}^3 \psi_i(d_p)}{\sum_i d_{pi}^3 \psi_i(d_p)} \quad [84]$$

Similarmente,

$$\psi_i(d_p) = \frac{p_i(d_p)/d_p^3}{\sum_i p_i(d_p)/d_{pi}^3} \quad [85]$$

### **Coordenadas Interna e Externa de Partícula e Distribuições Densidade**

Até agora, as partículas foram classificadas de acordo com duas propriedades mais importantes: o tamanho de partícula e a composição mineralógica. Esses são dois exemplos de muitas propriedades que podem ser usadas para descrever a partícula. Elas são, certamente, as propriedades descritivas mais importantes, até agora, no que diz respeito a processos de tratamento de minérios e hidrometalúrgicos. Entretanto, para que se possa desenvolver modelos efetivos para as operações unitárias, é sempre necessário assegurar que as partículas são descritas em detalhe suficiente para os objetivos do estudo de modelagem. É impossível fazer uma descrição completa de qualquer partícula, e conceitos, tais como, formas de partícula, topografia de superfície, energia de superfície, entre outros, não podem ser descritos, de forma essencialmente quantitativa, usando um número finito de variáveis. Consequentemente é sempre necessário

escolher um número finito e comparativamente pequeno de variáveis que possam ser usadas para descrever as propriedades das partículas em detalhe suficiente para os objetivos do modelo.

As propriedades que descrevem a natureza das partículas individuais são chamadas de coordenadas internas do espaço da fase particulada. A escolha dessas coordenadas é ditada inteiramente pela demanda do modelo. Entretanto, é necessário ter em mente que um dos principais objetivos da modelagem de uma operação unitária é ligá-las aos objetivos do fluxograma da planta, de maneira que a planta possa ser simulada. Ocorrerá muitas vezes que o conjunto de coordenadas internas que são requeridas para modelar uma das operações unitárias pode não ser apropriado para outros modelos. Em geral, o problema é resolvido especificando um conjunto de coordenadas internas que incluam todas as coordenadas internas requeridas para os modelos distintos, como subconjuntos. Isso significa que algumas das coordenadas internas serão redundantes em alguns dos modelos unitários. Isso, em geral, não causa nenhum problema.

Em algumas operações unitárias, a localização física da partícula no equipamento unitário pode ter um efeito muito significativo sobre o comportamento da partícula e é necessário, algumas vezes, rastrear a posição das partículas no equipamento, objetivando descrever as operações da unidade como um todo. Isso nem sempre é necessário. Todavia, ao formular a estrutura de um modelo geral, é conveniente incluí-las.

As funções distribuição, que foram descritas na seção prévia, podem ser relacionadas às funções densidade de distribuição correspondentes, e é conveniente formular em modelo generalizado nos termos da função densidade de distribuição conjunta, para todas as coordenadas internas e externas da partícula.

A função densidade de distribuição de partículas generalizada  $\psi(x)$  é uma função ordinária do argumento, vetor  $x$ , que compreende todas as coordenadas internas e externas que são relevantes ao problema em questão. Todos os possíveis vetores  $x$  compõem o espaço da fase particulada.  $\psi(x)$  é definida como a fração densidade em número, isto é, a fração em número da população inteira de partículas que ocupa um volume unitário do espaço da fase particulada. As funções de distribuição de partícula finitas, definidas previamente, podem ser construídas a partir da densidade de distribuição como segue.

No caso onde o espaço da fase consiste somente do tamanho ( $d_p$ ) da partícula e do teor ( $g$ ) da partícula

$$\Psi_{ij}(d_p, g_i) = \int_{D_i}^{D_{i-1}} \int_{G_i}^{G_{i+1}} \psi(d_p, g) dd_p dg \quad [86]$$

A descrição matemática de  $\Psi$ , algumas vezes, é difícil. Por exemplo, pode não ser possível obter  $\Psi$  em termos de quaisquer funções transcendentais conhecidas e  $\Psi$  pode ter que incluir as funções delta Dirac. Exemplos específicos são os dois extremos do espectro de liberação. Assim, tendemos a evitar  $\Psi$  para o trabalho de modelagem prática, e usá-lo apenas formalmente, para desenvolver algumas estruturas de modelos necessárias.

### **Propriedades de Partículas Derivadas de Coordenadas Internas**

As coordenadas internas de uma partícula devem ser suficientes para descrever todas as características significativas da mesma. Em muitas situações, é necessário obter alguma quantidade derivada. Alguns exemplos são:

- a análise do metal, a partir da composição mineralógica;
- a susceptibilidade magnética, a partir da susceptibilidade magnética dos minerais individuais;
- valor calorífico, teor de cinzas e de matéria volátil de uma partícula de carvão, a partir da matéria mineral contida mais o maceral contido.

A densidade da partícula é uma importante propriedade derivada e observa-se que está relacionada à composição mineralógica pela equação.

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{m=1}^M \frac{g_m}{\rho_m} \quad [87]$$

onde:

$\rho_m$  = densidade de fase mineral;

$\rho$  = densidade da partícula;

$g_m$  = fração em massa da fase mineral  $m$  na partícula (teor da partícula).

## 13 | O MÉTODO DE MODELAGEM DE BALANÇO POPULACIONAL

A caracterização de uma população de partículas, através da distribuição das partículas em variáveis externas e internas no espaço, proporciona um procedimento de modelagem formalizado, e muito poderoso. A idéia essencial é que quando as partículas movem através do ambiente de processamento, suas coordenadas externas e internas variam. As primeiras devido aos movimentos físicos das mesmas, enquanto que as outras, devido às alterações provocadas pelo processamento.

A coleção de coordenadas externas e internas ligadas a uma partícula define a localização da partícula no espaço da fase particulada. As coordenadas externas descrevem sua localização física real, enquanto as coordenadas internas descrevem as características da própria partícula. As coordenadas internas devem ser suficientemente numerosas para descrever a partícula em todos os detalhes necessários para sua completa caracterização em termos dos processos que devem ser descritos pelo modelo.

Alguns exemplos de coordenadas internas são:

- tamanho de partícula, talvez a mais importante de todas;
- composição mineralógica e química;
- forma da partícula e energia específica de superfície.

Algumas dessas coordenadas internas podem ser multidimensionais. Por exemplo, a composição mineralógica do material sólido pode incluir mais de dois minerais. Isso faz com que o vetor de composição mineralógica deve incluir uma coordenada para cada mineral distinto. Algumas vezes a multidimensionalidade das coordenadas internas deve ser infinita. Isto ocorre, por exemplo, durante o processo de

lixiviação, quando a concentração das espécies que estão sendo lixiviadas varia continuamente no interior da partícula, e a composição química deve ser conhecida em todos os pontos no interior da mesma. Em geral, o perfil de concentração do componente lixiviado será baixo, próximo da superfície da partícula e mais alto, a medida que o lixiviante não tenha atingido uma alta concentração, devido à resistência difusional no interior da partícula. O perfil de concentração é uma função do histórico completo de processamento da partícula. Na prática, não é conveniente usar uma coordenada dimensional infinita e várias aproximações dimensionais finitas devem ser feitas. Uma instância muito importante na qual uma caracterização interna uni-dimensional é completamente adequada se aplica aos processos topoquímicos, tecnicamente muito importantes, e onde a posição radial da interface topoquímica no interior da partícula contém a informação completa, referente ao perfil de concentração, e seu efeito sobre a velocidade do processo químico. Há uma grande classe de processos cinéticos que podem ser modelados topoquimicamente e, nestes casos, a velocidade instantânea do processo sobre a partícula como um todo, pode ser escrita como uma função somente da posição da interface topoquímica. Isto torna os modelos topoquímicos mais poderosos, certamente, para a descrição de processos cinéticos em sistemas particulados. Adicionalmente, modelos topoquímicos permitem o cálculo da velocidade na qual os limites topoquímicos mudam e esta velocidade é muito importante na formulação dos modelos de balanço populacional para a população de partículas como um todo.



## A Equação de Balanço Populacional Fundamental

Algumas definições:

- $\psi(x)dx$  é a fração em número de partículas, por volume unitário de espaço fase, isto é, a fração em número da população de partículas que ocupa um volume pequeno em torno da coordenada de fase  $x$ .
- $x$  é um ponto no espaço fase de coordenada  $x \in R^N$ .
- $u$  é um vetor *de velocidades* nas quais as partículas mudam as suas coordenadas de fase. Por exemplo, a taxa de variação de tamanho de partícula pela atrição, quando o tamanho de partícula é uma coordenada interna, a taxa de movimento da interface topoquímica, quando a posição da interface é a coordenada interna ou a taxa de variação da composição da partícula, quando a partícula passa por uma mudança química. Os elementos correspondentes à coordenada externa são as velocidades físicas num espaço tri-dimensional.
- $R(x)$  é a taxa na qual partículas na posição de coordenada  $x$  são destruídas. Esta taxa é especificada como massa por unidade de volume do espaço fase por unidade de tempo.
- $W_{in}$  é a taxa mássica de alimentação de material sólido para o sistema.
- $W_{out}$  é a taxa mássica de remoção de material sólido do sistema.
- $\bar{m}(x)$  é a massa média das partículas no ponto  $x$  do espaço fase.
- $N$  é o número total de partículas no sistema.
- $A$  é a taxa de adição de material no fluxo de alimentação.

- $Q$  é a taxa de remoção de material nos fluxos de produto.
- $B(x;x')$  é a função distribuição que descreve a forma com que um material pode se mover repentinamente de uma posição para outra no espaço fase, como consequência da sua destruição física ou quebra.  $B(x;x')$  é a fração em massa de material sólido que tem uma coordenada de fase menor do que  $x$ , produzida pela destruição de uma partícula na coordenada de fase  $x'$ . A afirmação de que a coordenada de fase de uma partícula é menor do que  $x$  deve ser interpretada para significar que toda coordenada de fase da partícula é menor do que o elemento correspondente de  $x$ .  $b(x;x')$  é a função densidade correspondente.
- $a(x; x')$  é a distribuição densidade para partículas produzidas pela atrição e outros processos de desgaste da coordenada  $x'$ .

Em geral,  $a(x; x')$  e  $b(x; x')$  são muito diferentes uma da outra, e em aplicações práticas cada função necessita ser determinada separadamente.

Considerar a região  $R_c$  do espaço de fase particulada, e levar em conta a acumulação da massa particulada em  $R_c$  por todos os processos que alteram as coordenadas das partículas. A região  $R_c$  é completamente envolvida pela superfície  $S_c$ .

Esses processos são:

- movimento através dos limites de  $R_c$  (movimento convectivo do espaço fase);
- chegadas, por etapas finitas, a partir de outras regiões do espaço fase;

- destruição de partículas na região  $R_c$ ;
- adição e remoção física nos fluxos de alimentação e produtos;

A contabilidade das partículas individuais na região  $R_c$  de referência leva a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{R_c} N\psi(x) dx = - \int_{S_c} N\psi(x) u \cdot n d\sigma - D + B - Q + A \quad [88]$$

Nesta equação,  $n$  é o vetor normal, direcionado para fora da superfície  $S_c$ , no ponto  $x$ .

Nos nossos sistemas de processamento mineral, a massa sólida é conservada, e isto impõe restrições importantes na formulação de equações de modelo.

Os processos de destruição podem geralmente ser descritos por uma taxa mássica de destruição por unidade de volume do espaço fase

$$D = \int_{R_c} \frac{R(\psi(x), x, F[\psi(x)])}{\bar{m}(x)} dx \quad [89]$$

e é especificado como o número de partículas quebradas por unidade de tempo no volume de controle  $R_c$ . A notação  $F_1[\psi(x)]$  indica que a função do processo de destruição  $D$  é uma função da distribuição completa  $\psi(x)$ , e não somente do valor de  $\psi(x)$  em  $x$ . Isto permite efeitos tais como a variação das taxas de quebra no moinho com quantidade de partículas finas e grossas presentes.

Os processos de gênese podem tão somente resultar (e deve necessariamente ser assim) dos produtos dos processos de destruição, uma vez que a massa deve ser conservada.

$$B = \int_{R_c} \frac{1}{\bar{m}(x)} \int_{R'(x)} R(\psi(x'), x', F[\psi(x)]) b(x; x') dx' dx$$

$$- \int_{R_c} \frac{N}{\bar{m}(x)} \int_{R''(x)} \psi(x') u(x') \cdot \nabla \bar{m}(x') a(x; x') dx' dx \quad [90]$$

Aqui  $R'(x)$  e  $R''(x)$  são as regiões do espaço a partir das quais partículas progênes podem entrar no volume infinitesimal de fase  $dx$ , em torno do ponto  $x$ , por processos de quebra e atrição, respectivamente. Estas são denominadas regiões alimentadoras para o ponto  $x$ .

A restrição de conservação de massa distingue os sistemas de processamento mineral de outros processos particulados, tais como cristalização e lixiviação, nos quais a transferência de massa entre a fase sólida e a fase líquida e a massa da fase sólida não é conservada.

Massa entra e sai do volume de processamento pela adição e remoção física, através dos fluxos de alimentação e de produto. A taxa de adição é dada por

$$A = W_{in} \int_{R_c} \left( \frac{N}{M} \right)_{in} \psi_{in}(x) dx \quad [91]$$

e a taxa de remoção é dada por

$$Q = \sum_j W_{out j} \int_{R_c} \left( \frac{N}{M} \right)_j \psi_{out j}(x) dx \quad [92]$$

Na equação [93],  $j$  indexa os diferentes fluxos físicos dos produtos. A integral sobre a superfície da região de referência é inconveniente, e esta pode ser convertida para uma integral sobre o volume, pela aplicação do teorema da divergência.

$$\int_{S_c} N \psi(x) u \cdot n \, d\sigma = \int_{R_c} N \nabla \cdot u \psi(x) dx \quad [93]$$

A equação final de trabalho, para a operação em regime constante, é

$$\begin{aligned}
& N \int_{R_c} \nabla \cdot u \psi(x) dx + \int_{R_c} \frac{R(\psi(x), x, F[\psi(x)])}{\bar{m}(x)} dx \\
& - \int_{R_c} \frac{1}{\bar{m}(x)} \int_{R'(x)} R(\psi(x'), x', F[\psi(x')]) b(x; x') dx' dx \\
& + \int_{R_c} \frac{N}{\bar{m}(x)} \int_{R''(x)} \psi(x') u(x') \cdot \nabla \bar{m}(x') a(x; x') dx' dx \\
& = - \sum_j W_{out j} \left( \frac{N}{M} \right)_j \int_{R_c} \psi_{out j}(x) dx + W_{in} \left( \frac{N}{M} \right)_{in} \int_{R_c} \psi_{in}(x) dx
\end{aligned} \tag{94}$$

Esta equação pode ser especializada para um grande número de rotas de processo, adequando-se aos requisitos de qualquer aplicação em particular. Ela pode ser escrita em termos de funções densidade, em massa, pela substituição de  $\psi(x)$  em termos de  $p(x)$ , usando equações tais como a [79].

Em virtude da região  $R_c$  ser arbitrária, a equação [94] pode ser escrita como uma equação integro-diferencial funcional.

$$\begin{aligned}
& N \nabla \cdot u \psi(x) + \frac{R(\psi(x), x, F[\psi(x)])}{\bar{m}(x)} \\
& - \frac{1}{\bar{m}(x)} \int_{R'(x)} R(\psi(x'), (x'), F[\psi(x')]) b(x; x') dx' \\
& + \frac{N}{\bar{m}(x)} \int_{R''(x)} \psi(x') u(x') \cdot \nabla \bar{m}(x') a(x; x') dx' \\
& = - \sum_j W_{out j} \left( \frac{N}{M} \right)_j \psi_{out j}(x) dx + W_{in} \left( \frac{N}{M} \right)_{in} \psi_{in}(x)
\end{aligned} \tag{95}$$

Essa forma da equação de balanço populacional é, na maioria dos casos, a mais conveniente para a solução analítica.

A equação de balanço populacional deve ser resolvida sujeita à condição.

$$\int \psi(x) dx = 1 \quad [96]$$

onde a integral é tomada sobre todo o espaço fase.

As duas funções quebra  $b(x; x')$  e  $a(x; x')$  devem satisfazer duas condições importantes.

$$\int_{R_{A'}} b(x; x') dx = 1 \quad [97]$$

$$\int_{R_{A''}} a(x; x') dx = 1$$

$R_{A'}$  e  $R_{A''}$  são as regiões do espaço fase que podem ser alcançadas pelas partículas progênie que são formadas pela quebra (distribuição  $b$ ) ou atrição (distribuição  $a$ ) no ponto  $x'$ . Estas são denominadas regiões acessíveis do espaço fase e são complementares às regiões alimentadoras  $R'$  e  $R''$ . A determinação das regiões alimentadoras  $R'$  e  $R''$  e as regiões acessíveis  $R_{A'}$  e  $R_{A''}$  pode ser bastante difícil. Normalmente, é mais fácil definir as regiões acessíveis do que as regiões alimentadoras e este fato pode ter um efeito significativo sobre a escolha dos algoritmos computacionais que podem ser usados com sucesso.

Na maioria das aplicações, a equação de balanço populacional fundamental será reduzida a uma forma discreta apropriada, com a região  $R_c$  correspondendo a uma classe de partículas apropriada.

## A Equação de Balanço Populacional Geral para Máquinas de Cominuição

A equação de balanço populacional provê um modelo poderoso para a descrição de máquinas industriais de cominuição. Ela permite o desenvolvimento de um modelo uniforme que descreve o comportamento operacional de moinhos de barras, bolas, semi-autógenos e autógenos. Devido à grande importância prática dessas operações, algum esforço é devotado aqui para o desenvolvimento cuidadoso de modelos, a partir de uma equação de balanço populacional detalhada [95].

Uma forma restrita da equação de balanço populacional geral é gerada sob as seguintes condições: somente uma coordenada interna, o tamanho de partícula, e assume-se que a quebra e os processos de desgaste não dependem da posição da partícula no moinho, de forma que as coordenadas externas são irrelevantes. A equação geral [95] é, desta forma, escrita como:

$$\begin{aligned}
 & N \frac{d}{dx} (u(x)\psi(x)) + \frac{R(\psi(x), x, F[\psi(x)])}{\beta x^3} \\
 & - \frac{1}{\beta x^3} \int_{R'(x)} R(\psi(x'), x', F[\psi(x')]) b(x; x') dx' \\
 & + \frac{N}{\beta x^3} \int_{R''(x)} \psi(x') u(x') \frac{d\beta \beta x^3}{dx} a(x; x') dx' \\
 & = -W \left( \frac{N}{M} \right)_{out} \psi_{out}(x) + W \left( \frac{N}{M} \right)_{in} \psi_{in}(x) \quad [98]
 \end{aligned}$$

Na equação [98], o escalar  $x$  representa o tamanho de partícula  $d_p$  e a massa média de uma partícula está relacionada ao tamanho por:

$$\bar{m}(x) = \beta x^3 \quad [99]$$

Um modelo comumente usado para a taxa de atrição e outros processos de desgaste tais como o lascamento é o de que a taxa é proporcional a área superficial da partícula. Usando uma partícula esférica como modelo.

$$\frac{\pi}{6} \frac{dx^3}{dt} = -\frac{k'\pi'}{2} \quad [100]$$

que implica que a velocidade na qual uma partícula, em se desgastando, move no espaço fase, é constante, e é dada por:

$$u(x) = \frac{dx}{dt} = -k' \quad [101]$$

Um modelo mais geral para processos de desgaste de superfície é:

$$\frac{dx}{dt} = -k(x) = -kx^\Delta \quad [102]$$

onde  $\Delta$  é uma constante entre 0 e 1.

Isto implica que:

$$\frac{dm}{dt} = -k \frac{\pi \rho_s x^{2+\Delta}}{2} \quad [103]$$

Se  $\Delta = 0$ , a taxa específica de desgaste da superfície é constante, enquanto  $\Delta > 0$  significa que a taxa de desgaste da superfície específica aumenta quando o tamanho da partícula aumenta. Como mostrado acima,  $\Delta = 0$  é equivalente a assumir que a taxa de desgaste da superfície é proporcional à área superficial da partícula, enquanto  $\Delta = 1$  significa que a taxa de desgaste da superfície é proporcional à massa da partícula.



É usual desenvolver a equação de balanço populacional em termos da distribuição de massa, e a equação [98] é convertida usando a equação [78].

$$\psi(x) = \frac{M}{N} \frac{p(x)}{\beta x^3} \quad [104]$$

A equação (98) torna-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{M}{\beta} \frac{d(k(x)p(x)/x^3)}{dx} + \frac{R(p(x),x,F[p(x)])}{\beta x^3} \\ & - \frac{1}{\beta x^3} \int_{R'(x)} R(p(x'),x',F[p(x')])b(x;x')dx' - \frac{M}{\beta x^3} \int_{R''(x)} \frac{p(x')}{x'^3} 3k(x')x'^2 a(x;x')dx' \\ & = -W \frac{P_{out}(x)}{\beta x^3} + W \frac{P_{in}(x)}{\beta x^3} \end{aligned} \quad [105]$$

A taxa de destruição é intensiva com respeito à densidade de massa média sobre o espaço fase. Considere dois sistemas tendo espaço fase idênticos, todavia contendo massas totais diferentes. Em particular,  $\psi(x)$  é idêntica para ambos os sistemas. Então:

$$\frac{R_1(p(x),x,F[p(x)])}{R_2(p(x),x,F[p(x)])} = \frac{M_1}{M_2} \quad [106]$$

Portanto:

$$R(p(x),x,F[p(x)]) = M R'(p(x),x,F[p(x)]) \quad [107]$$

Além disso, uma hipótese lógica para o processo de quebra física sugere que:

$$R(p(x),x,F[p(x)]) = M p(x)k(x,F[p(x)]) \quad [108]$$

$k(x, F[p(x)])$  é a taxa específica de quebra de material de tamanho  $x$ , e representa a taxa de quebra quando 1 kg de material de tamanho  $x$  está no moinho.

O tempo de residência médio no moinho é:

$$\tau = \frac{M}{W} \tag{109}$$

onde  $W$  é a taxa de fluxo através do moinho.

A equação [105] torna-se:

$$\begin{aligned} & -\tau \frac{dk(x)p(x)}{dx} + 3\tau k(x) \frac{p(x)}{x} + \tau R(p(x), x, F[p(x)]) \\ & - \tau \int R'(p(x), x' F[p(x')]) b(x; x') dx' - \tau \int_{R''(x)} 3k(x') \frac{p(x')}{x'} a(x; x') dx' \\ & = \frac{R'(x)}{p_{in}(x)} - p_{out}(x) \end{aligned} \tag{110}$$

Esta é a equação de balanço populacional fundamental para qualquer processo de cominuição e que incorpora ambos, processos autógenos e quebra induzida por meio moedor. É difícil resolver esta equação integro-diferencial, principalmente, porque as funções  $R$ ,  $b$  e  $a$  são fortemente não lineares. Em condições práticas, somente soluções numéricas são possíveis. Estas soluções estão implementadas em simuladores de sistemas particulados, como o Modsim e seus derivados MicroSim a Usimpac.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDREWS, J.R.G. and Mika, T.S. (1976) Comminution of heterogenous material. Development of a model for liberation phenomena. *Proc. 11<sup>th</sup> Int Mineral processing Congress*, pp. 59-88.
- BARBERY, G. (1991) *Mineral Liberation. Measurement, Simulation and Practical Use in Mineral Processing*. Editions GB, Quebec.
- COLEMAN, R. (1988) Least squares and its application to mineral liberation. *Arch. Mining Sci.*, Poland, vol.33, pp.270-290.
- FANDER, H.W. (1985) *Mineralogy for Metallurgists: an Illustrated Guide*. The institution of Mining and Metallurgy, London.
- FORD, M.A. (1979) Simulation of Ore Dressing Plants. Ph.D. Thesis, University of the Witwatersrand, Johannesburg.
- GAUDIN, A.M. (1939) *Principles of Mineral Dressing*. McGraw-Hill, New York.
- GOODMAN, F.K. and McCreery, J.H. (1988) Coal Preparation Plant Computer Model Vols I and II. U.S. Environment Protection Agency EPA-600/7-80-010 a & b.
- GOTTFRIED, B.S. (1975) Computer Simulation of Coal Preparation Plants. U.S. Bureau of Mines, Grant n°. GO-155030 Final Report, Dept of Industrial Engineering, Univ. of Pittsburgh, Nov 1975 and Aug 1977.
- GOTTFRIED, B.S. and Jacobsen, P.S. (1977) Generalized Distribution Curve for Characterizing the Performance of Coal-Cleaning Equipment USBM RI 8238.

- GOTTFRIED, B.S., Luckie, P.T. and Tierney, J.W. (1982) Computer Simulation of Coal Preparation Plants. U.S. Dept of Energy Final Report under contract AC22-80PC30144. DOE/PC/30144-T7, 284 pp.
- HENNINGS, K. and Grant, D. (1982) A simulation model for the prediction of the performance of vibrating screens. USBM Contract J039138, U.S. Department of the Interior. Washington D.C.
- HULBURT, H.M. and Katz, S. (1964) Some problems in particle technology. A statistical mechanical formulation. *Chemical Engineering Science*, vol. 19, pp 555-574.
- ICRA (1995) Simulation of Comminution Operations. Standard Problems for Simulators. International Comminution Research Association. 5<sup>th</sup> Workshop, Napa.
- JONES, M.P. (1987) *Applied Mineralogy: A Quantitative Approach*. Graham and Trotman, London.
- KING, R.P. (1972) Data preparation and use of a computer program for the calculation of the performance of a flotation plant. National Institute of Metallurgy (now Mintek), Johannesburg, Report number 1436, 9 pp. Reissued in revised form August 1993.
- KING, R.P., Pugh, G. and Langley, J. (1973) Application of a flotation model to an industrial plant. National Institute of Metallurgy (now Mintek), Johannesburg, report number 1562, 16 pp.
- KING, R.P. (1990) Calculation of the liberation spectrum in products produced in continuous milling circuits. *Proc. 7<sup>th</sup> European Symposium on Comminution*, vol. 2, pp. 429-444.
- KING, R.P. (1994) Linear stochastic models for mineral liberation. *Powder Technology*, vol. 81, pp. 217-234.

KING, R.P. and Schneider, C.L. (1998) Stereological correction of linear grade distributions for mineral liberation. *Powder Technology*, vol. 98, pp.21-37.

KOLMOGOROV, A.N. (1941) The logarithmically normal law of distribution of dimensions of particles when broken into small parts. NASA Technical Translations NASA TTF 12.287.

SCHNEIDER, C.L. (1995) The Measurement and Calculation of Liberation in Continuous Milling Circuits. Ph.D. Thesis. University of Utah.

## SÉRIES CETEM

As Séries Monográficas do CETEM são o principal material de divulgação da produção científica realizada no Centro. Até o final do ano de 2015, já foram publicados, eletronicamente e/ou impressos em papel, mais de 300 títulos, distribuídos entre as seis séries atualmente em circulação: Rochas e Minerais Industriais (SRMI), Tecnologia Mineral (STM), Tecnologia Ambiental (STA), Estudos e Documentos (SED), Gestão e Planejamento Ambiental (SGPA) e Inovação e Qualidade (SIQ). A Série Iniciação Científica consiste numa publicação eletrônica anual.

A lista das publicações poderá ser consultada em nossa homepage. As obras estão disponíveis em texto completo para download. Visite-nos em <http://www.cetem.gov.br/series>.

### Últimos números da Série Tecnologia Mineral

STM-95– **Análise Termodinâmica da Solubilização de Lantânio, Neodímio e Tório na Lixiviação ácida da Monazita.** Felipe Ramalho Pombo e Ronaldo Luiz Corrêa dos Santos, 2016.

STM-94– **Separação de Terras Raras a partir da Extração por Solvente: Revisão sobre o uso dos extratantes ácidos organofosforados.** Ysrael Marrero Vera, 2015.

STM-93– **Quartzo de Várzea di Seridó – PB: Tecnologia de Lavra e de Beneficiamento.** Francisco Wilson Hollanda Vidal, Antonio Rodrigues de Campos e Julio Cesar Guedes Correia, 2015.

## **INFORMAÇÕES GERAIS**

CETEM – Centro de Tecnologia Mineral  
Avenida Pedro Calmon, 900 – Cidade Universitária  
21941-908 – Rio de Janeiro – RJ  
Geral: (21) 3865-7222  
Biblioteca: (21) 3865-7218 ou 3865-7233  
Telefax: (21) 2260-2837  
E-mail: [biblioteca@cetem.gov.br](mailto:biblioteca@cetem.gov.br)  
Homepage: <http://www.cetem.gov.br>

## **NOVAS PUBLICAÇÕES**

Se você se interessar por um número maior de exemplares ou outro título de uma das nossas publicações, entre em contato com a nossa biblioteca no endereço acima.

Solicita-se permuta.

We ask for interchange.



## **Missão Institucional**

Desenvolver tecnologias inovadoras e sustentáveis, e mobilizar competências visando superar desafios nacionais do setor mineral.

## **O CETEM**

O Centro de Tecnologia Mineral - CETEM é um instituto de pesquisas, vinculado ao Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações - MCTIC, dedicado ao desenvolvimento, à adaptação e à difusão de tecnologias nas áreas minerometalúrgica, de materiais e de meio ambiente.

Criado em 1978, o Centro está localizado no campus da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, na Cidade Universitária, no Rio de Janeiro e ocupa 20.000m<sup>2</sup> de área construída, que inclui 25 laboratórios, 4 plantas-piloto, biblioteca especializada e outras facilidades.

Durante seus 38 anos de atividade, o CETEM desenvolveu mais de 800 projetos tecnológicos e prestou centenas de serviços para empresas atuantes nos setores minerometalúrgico, químico e de materiais.